**La circulation des sciences arabes autour de la Méditerranée, du 8è au15è siècle.**

**Histoire des sciences arabes**

**NAISSANCE ET DEVELOPPEMENT**

**A TRAVERS L'EXEMPLE DES MATHEMATIQUES**

**A. DJEBBAR**

**2002-02-12**

**INTRODUCTION**

Pour un nombre de plus en plus grand de scientifiques, enseignants ou chercheurs, la nécessité de connaître le contenu de l'histoire des sciences et de l'intégrer dans l'enseignement n'est plus à démontrer. Pour des raisons pédagogiques, culturelles, idéologiques ou pour la simple curiosité intellectuelle, ces scientifiques s'initient à elle et encouragent parfois sa diffusion.

Mais, la tendance des chercheurs et des enseignants a été pendant longtemps de privilégier la production scientifique des trois derniers siècles pour les bouleversements qu'elle a provoqués dans le domaine de la connaissance, pour les problèmes ouverts qu'elle a légués aux chercheurs à venir (et dont certains n'ont toujours pas été résolus) et enfin parce que, tout simplement, la science moderne s'étant développée en Europe, ou d'une manière générale dans l'aire culturelle occidentale, son histoire en a gardé certaines conceptions et même certains a priori que l'on pourrait qualifier d'eurocentristes ou de globalement occidentaux.

Il n'est pas superflu d'ailleurs de constater, aujourd'hui encore, la persistance de ces conceptions et de ces a priori non seulement dans l'enseignement scientifique européen, mais également dans celui de certains pays anciennement colonisés et ce malgré les ruptures idéologiques du XIXe siècle, en Europe même, et malgré les mouvements nationaux du XXe visant à l'indépendance politique.

Quant aux deux mille ans d'activités scientifiques qui ont précédé et surtout permis le grand bond en avant des "temps modernes", ils ont été longtemps réduits à la période grecque qui ne va pas d'ailleurs au delà du VIe siècle et qui, malgré son importance, ne pouvait, à elle seule, redynamiser les nombreux secteurs d'une activité scientifique qui s'était assoupie en Europe entre le VIIIe et le XIVe siècle.

Il y a eu, certes, depuis la fin du XIXe siècle d'importants travaux concernant les sciences indiennes, arabes ou chinoises mais, le plus souvent, ces travaux n'ont pas dépassé le cercle des spécialistes. Pour prendre l'exemple de la science arabo-musulmane, on constate que les efforts faits par des particuliers ou par des institutions pour les mettre à la portée des enseignants ont été, pendant des décennies, rares, discontinus ou tout simplement inexistants. La situation n'est d'ailleurs pas brillante aujourd'hui, malgré la multiplication des publications de vulgarisation, car certains de leurs auteurs continuent, volontairement ou par ignorance, à minimiser le rôle joué par les savants non européens dans le développement des activités scientifiques, tandis que d'autres -et c'est le cas de plusieurs livres arabes parus ces vingt dernières années- sont soit trop généraux et trop imprécis, soit trop apologétiques pour être tout simplement crédibles.

Cet exposé qui ne concerne que les activités mathématiques vise à compléter l'information du lecteur, en l'actualisant parfois sur la base travaux publiés au cours de ces deux dernières décennies. D'une manière plus précise, nous évoquerons les aspects essentiels de l'innovation mathématique en pays d'Islam, durant la période créatrice, c'est à dire entre le VIIIe et le XIVe siècle, en tentant de dégager les causes internes et externes qui ont permis, favorisé ou entravé les recherches nouvelles et ce, compte tenu des interactions connues ou supposées entre les différentes sciences de la civilisation arabo-musulmane d'une part et entre ces sciences et leur environnement économique et culturel d'autre part.

**LE CONTEXTE DE LA REDYNAMISATION DES SCIENCES**

**A PARTIR DU VIIIe SIECLE :**

La redynamisation d'une activité scientifique dans le cadre d'une civilisation donnée est évidemment inconcevable sans l'acquisition d'au moins une partie du patrimoine des civilisation qui l'ont précédée, et la science arabe ne fait pas exception à cela. Un rappel des traditions mathématiques antérieures au VIIIe siècle est donc nécessaire pour mieux apprécier la nature des apports nouveaux, leur importance et leur impact. En nous basant sur les témoignages des savants arabes eux-mêmes, comme al-Bîrûnî par exemple, ainsi que sur les traductions des ouvrages mathématiques dont les titres nous ont été transmis par les biobibliographes arabes comme Ibn an-Nadîm, Ibn al-Qiftî ou Ibn Abî Usaybica, on peut avancer plusieurs remarques: on constate, en premier lieu, que malgré son importance qualitative et quantitative, l'héritage scientifique grec n'a pas été seul à l'origine de la science arabe. Il faut y ajouter les traditions astronomiques persanes et surtout indiennes transmises par l'intermédiaire des *Sindhind*, ainsi que les techniques du calcul indien basées sur les systèmes décimal et sexagésimal. A ces deux influences non grecques, il faudrait également associer une troisième, celle des Babyloniens que les biographes et les mathématiciens ont généralement omis de signaler mais que confirme l'analyse des textes arabes en particulier dans le domaine des algorithmes de calcul exact ou approché et dans celui des résolutions d'équations simples. Il y a enfin toutes les traditions locales liées aux activités économiques, comme les techniques d'arpentage ou bien le calcul digital et le calcul mental dont certains aspects, perpétués par la pratique quotidienne, ont longtemps résisté à l'extension du système décimal, amenant les mathématiciens à les étudier et à leur donner des justifications théoriques.

Cela étant, il est indéniable que l'héritage préislamique le plus important a été celui des mathématiques grecques qui seront accessibles soit directement par des traductions du grec à l'arabe, soit indirectement à partir de traductions syriaques qui étaient utilisées dans quelques foyers intellectuels avant l'avènement de l'Islam.

Il est d'ailleurs utile de faire, à propos de ces traductions, plusieurs remarques qui concernent les rapports entre ce phénomène et celui de la réactivation scientifique en Méditerranée orientale à partir du VIIIe siècle.

Certains ouvrages fondamentaux ont bénéficié de plusieurs traductions et leurs chapitres ou leurs propositions ont subi différents réarrangements. Ce fut le cas, par exemple, des *Eléments* d'Euclide (traduits par al-Hajjâj deux fois, puis par Ishâq Ibn Hunayn, et enfin corrigés par Thâbit Ibn Qurra). Ce fut également le cas de *l'Almageste* de Ptolémée et de *Coniques* d'Apollonius. Ces améliorations successives répondaient à un besoin de rigueur qui ne faisait que refléter un double progrès, celui des mathématiques et celui de la langue arabe elle-même. Le premier phénomène devant être évoqué plus amplement par la suite, disons quelques mots du second, c'est à dire l'enrichissement de l'arabe de différentes terminologies scientifiques. Cet enrichissement est le résultat de deux phénomènes importants intérieurs à l'activité scientifique : le premier est l'apparition puis le développement d'une recherche, avec son esprit, ses règles, ses structures et ses hommes qui vont explorer des domaines nouveaux, créer des objets et des outils puis, dans le même temps, forger les mots pour les dire et pour les utiliser. Le second phénomène, indissociable du premier et d'une portée sociale encore plus grande, est la mise sur pied progressive d'un enseignement qui sera longtemps de qualité, grâce à sa capacité d'intégrer très rapidement des méthodes et des résultats nouveaux et d'assurer, par sa pratique quotidienne, la transmission de cette nouvelle langue scientifique et sa pérennité.

Ainsi, la réactivation scientifique des VIIIe-IXe siècles a bénéficié à la fois de traditions prestigieuses avancées, relativement accessibles, et d'une langue en contact continuel avec les autres langues par le biais des échanges commerciaux et bénéficiant désormais d'un atout considérable celui d'être l'expression d'une religion triomphante. Mais, à cette époque, ces deux facteurs ne pouvaient suffire à entraîner des individus, de cultures, de langues et de religions très diverses, dans la grande aventure scientifique qui va concerner, pendant plus de quatre siècles, toutes les métropoles d'Orient, d'Asie, du Maghreb et de l'Espagne. En effet, entre le Ve et le VIIIe siècle, il existait bien, d'un côté, des petits îlots scientifiques, comme ceux d'Alexandrie, d'Antioche ou de Harran et, de l'autre, des hommes et des femmes assoiffés de connaissances, potentiellement créateurs et dont les intelligences sont pourtant restées en friche.

C'est presque une évidence de dire que c'est l'avènement de l'Islam puis son extension, relativement rapide, qui ont créé les conditions nouvelles pour un bond en avant dans des domaines aussi différents que le commerce à grand rayon, la technologie industrielle, la théologie, l'astrologie, la philosophie et les sciences exactes. Mais, cette évidence première resterait ambiguë sans une analyse permettant de dégager les liens qui se sont tissés entre la nouvelle religion, apparue à un moment donné de l'histoire des sociétés préislamiques, et les composantes dynamiques de ces sociétés. Non seulement cela n'enlèverait rien à l'importance du phénomène religieux, mais cela permettrait également de mieux appréhender son rôle en tant que projet culturel et surtout en tant que vecteur politique et idéologique à multiples facettes. Ne pouvant mener une analyse approfondie dans le cadre restreint de cet exposé, nous nous contenterons de présenter quelques faits précis qui ont eu un lien avec les premiers pas de la science arabe et qui ont parfois pesé sur son contenu et sur ses orientations.

Sur le plan religieux, les passages explicites ou les allégories des deux textes fondamentaux -le Coran et le Hadith- ont façonné aux premiers temps de l'Islam, une attitude très favorable aux sciences. Cette attitude se concrétisera très vite, dans les foyers principaux, par l'apparition d'un mécénat califal ou princier, enthousiaste et généreux qui financera les traductions, les acquisitions de livres rares, la construction de bibliothèques publiques, d'observatoires et de laboratoires.

L'historiographie arabe classique insiste, à juste titre, sur le rôle de celui qui est considéré comme le plus prestigieux de ces mécènes, le calife abbasside al-Ma'mun qui créa, en particulier, la fameuse Maison de la Sagesse (Bayt al-hikma), laquelle deviendra un haut lieu de recherche et de débats. On pourrait bien sûr lui associer d'autres personnages qui, sans avoir tous eu son prestige, ont tous apporté, d'une manière ou d'une autre, une contribution décisive dans ce domaine : le prince omeyyade Khâlid Ibn Yazîd constitua une des premières bibliothèques scientifiques arabes et finança des traductions d'ouvrages traitant de chimie. Plus tard, dans les provinces de l'Est, l'arrivée au pouvoir d'Ulug Beg, petit fils de Tamerlan, relança les recherches astronomiques à Samarcande. En Occident musulman, deux figures ont particulièrement dominé les autres dans le domaine du mécénat, celle de l'Omeyyade al-Hakam II, en Espagne et celle de l'almohade Abû Yacqûb Yûsuf au Maghreb.

Mais, heureusement, le mécénat a largement débordé les cours et les palais, devenant une caractéristique de certaines couches sociales plus ou moins aisées. Ainsi, les particuliers, qu'ils fussent marchands entrepreneurs ou savants fortunés, ont été encore plus nombreux à venir en aide à la science, soit en rétribuant des savants, soit en entretenant des bibliothèques, soit en finançant de leur vivant, et même après leur mort par le système du Waqf (biens de main morte), la construction puis la gestion de fondations à caractère scientifique large. Il y eut ainsi des mathématiciens et des physiciens comme les frères Banû Mûsâ à Baghdad et Ibn Abî ar-Rijâl à Kairouan, des médecins de grand renom comme Ibn al-Matrân à Damas et Ibn an-Nafîs au Cair ou bien, parfois, de simples bienfaiteurs comme Fâtima Umm al-Banûn qui construisit la mosquée-université des Qarawiyyines, à Fès.

Cela dit, si l'on y regardait de plus près, on constaterait que ce mécénat, aussi important fut-il, ne pouvait, en tant que phénomène social, se développer sans un environnement politique et économique favorable. Les historiens arabes ne se sont pas toujours préoccupés du rôle de l'économie et des grandes orientations politiques, au cours des périodes qu'ils étudiaient mais on peut découvrir dans leurs ouvrages, ici ou là, des faits et des opinions qui suggèrent des influences directes ou indirectes de ces deux domaines sur l'activité scientifique.

Ainsi, parmi les décisions ou les actes politiques qui ont objectivement eu des incidences sur cette activité on peut citer pêle-mêle : l'arabisation de la monnaie et des administrations par le calife omeyyade cAbd al-Malik, la mise en place par les abbassides, dès la fin du VIIIe siècle, des premières usines à papier, inaugurant ainsi un nouveau secteur économique bientôt florissant qui favorisera une relative démocratisation de la science par la multiplication des ouvrages et leur diffusion rapide. Un peu plus tard, l'apparition des Maisons de la Science (Dâr al-cilm), d'inspiration fatimide, puis des Madrasa d'orientation sunnite, en Orient et au Maghreb, aura des incidences sur le cours de l'activité scientifique, par le biais de leurs enseignements dont le contenu était désormais contrôlé par les pouvoirs en place.

Enfin, comme l'a si bien observé à son échelle le grand historien maghrébin du XIVe siècle Ibn Khaldûn, on ne doit pas occulter les crises politiques et économiques locales ou régionales et leurs effets indirects sur le ralentissement des activités scientifiques en pays d'Islam, puis leur mise en sommeil durant des siècles.

Dans le prolongement de ce qui vient d'être dit on pourrait penser que, passée la période de démarrage, la science arabe a suivi des orientations déterminées entièrement par les données religieuses, politiques et économiques qui ont caractérisé les sociétés musulmanes des VIIIe-XVIe siècles. La réalité est en fait plus complexe, en particulier dans le domaine qui nous intéresse ici. On observe en effet que la recherche en mathématique et en physique a obéi à deux motivations distinctes.

La première, directement liée aux données nouvelles, sera nourrie effectivement par les sollicitations des différentes activités sociales : détermination du temps pour les prières et le jeûne, étude du mouvement des planètes, en particulier pour les besoins de la prévision astrologique, calcul exact ou approché des parts d'un héritage, élaboration de méthodes arithmétiques pour les transactions commerciales et la comptabilité des différents services de l'Etat, ou de méthodes géométriques pour le cadastre et l'architecture, enfin conception et fabrication d'instruments répondant à des besoins variés; mécanismes ingénieux pour l'irrigation, miroirs ardents et engins de guerre pour les armées, astrolabes pour les marchands et les marins, automates d'agréments pour les cours princières, etc. Cette première orientation a, malgré ses préoccupations immédiates, favorisé des innovations techniques et permis des recherches théoriques en Mathématique et en Physique.

La seconde motivation est née de l'existence d'une riche tradition scientifique préislamique. Les savants arabo-musulmans y trouveront, en plus de la matière pour leur propre formation des problèmes non résolus ou inachevés qui aiguiseront leur curiosité et orienteront ainsi certaines de leurs recherches vers des travaux sans aucun rapport avec leur vécu social.

**LES DOMAINES ET LES FORMES DE L'APPORT DES MATHEMATICIENS**

**DES PAYS D'ISLAM :**

Bon nombre de livres d'histoire des sciences d'Europe et d'ailleurs continuent de limiter l'apport des mathématiques des pays d'Islam à l'Algèbre et à l'Astronomie classique. Il est encore trop tôt, bien sûr, pour faire le bilan exact des démarches et des résultats originaux, mais les recherches de ces dernières décennies permettent déjà d'affirmer que cette innovation a concerné également l'Arithmétique, la Théorie des nombres, la Géométrie, la Trigonométrie, le Calcul infinitésimal et l'analyse combinatoire .

Pour certaines de ces disciplines, comme l'Algèbre, la Trigonométrie et l'Analyse combinatoire, il s'agit même de l'élaboration de matières nouvelles, soit à partir de quelques techniques anciennes, soit à partir de la résolution de problèmes concrets qui ont permis, par la suite, de dégager des notions nouvelles et de les étudier pour elles-mêmes.

**LES DISCIPLINES TRADITIONNELLES**

L'innovation dans les disciplines traditionnelles, c'est à dire la Géométrie, l'Astronomie et l'Arithmétique, a été très riche et très diversifiée et il n'est pas possible d'en exposer le contenu en quelques lignes. Nous nous contenterons donc, ici, de dégager les aspects essentiels et les orientations nouvelles qu'elles ont suscités, même lorsque ces orientations n'ont pas toujours bénéficié des conditions favorables, extérieures à la science, qui leur auraient permis de déboucher sur des résultats encore plus importants ou même sur de nouvelles disciplines.

Un premier aspect de l'innovation a été une relecture des traités classiques avec, en particulier, l'arithmétisation du Livre X des*Eléments* d'Euclide qui a permis la manipulation des irrationnels quadratiques, la reformulation de la notion de rapport du Livre V qui a abouti à l'extension du concept de nombre à tous les réels positifs, favorisant ainsi, sous l'impulsion de l'astronomie, l'élaboration de nouvelles techniques d'approximation.

En théorie des nombres, deux livres grecs, en dehors des *Eléments*, ont été à l'origine des recherches ultérieures : *l'Introduction arithmétique* de Nicomaque, qui sera étudiée selon le point de vue des suites et, à partir du Xe siècle, les *Arithmétiques* de Diophante qui feront l'objet d'une lecture algébrique féconde, comme on le verra par la suite.

Le second aspect de l'innovation concerne la résolution de problèmes non résolus par les Anciens ou dont la résolution a été jugée non satisfaisante. Il en est ainsi, par exemple, de la proposition IV du Livre II de *la Sphère et du cylindre* d'Archimède, du problème de la multisection d'un angle avec, en particulier, la construction de l'heptagone et de l'ennéagone, ou enfin de l'étude particulière de certaines classes d'entiers comme les nombres premiers et les nombres parfaits.

Mais, l'aspect sur lequel pendant longtemps les livres d'histoire des sciences n'ont pas suffisamment insisté et qui demeure encore imparfaitement connu est celui concernant les problèmes nouveaux que se sont posés les mathématiciens arabes et qui ont mené à l'établissement de résultats importants et parfois même à la création de nouvelles disciplines. Voici, brièvement évoqués, quelques-uns des célèbres problèmes traités entre le IXe et le XIIe siècle.

Au vu des manuscrits connus et analysés, les recherches en Arithmétique se sont orientées vers trois directions : la première a concerné l'étude des nombres premiers. Elle a débuté avec les travaux de Thâbit Ibn Qurra sur les nombres amiables et s'est poursuivie avec ceux d'Ibn al-Haytham (m. 1041) et d'al-Fârisî.

La seconde orientation de la recherche en Théorie des nombres, suggérée par une lecture algébrique des *Arithmétiques* de Diophante, suscitera deux types de travaux : les uns concerneront la résolution des systèmes d'équations indéterminées dans l'ensemble des entiers ou des rationnels, comme cela est traité dans le *Kitâb at-tarâ'if fî-l-hisâb* d'Ab‚ Kâmil (m. 930) et dans le*Fakhrî* d'al-Karajî, les autres seront consacrés à l'étude des triangles rectangles numériques et des nombres congruents. Parmi les chercheurs qui y ont contribué, on peut citer Abû l-Jûd, al-Khâzin, as-Sijzî, tous des mathématiciens du XIe siècle, ainsi qu'Ibn al-Haytham.

La troisième orientation qui a été révélée, en partie, par les recherches sur les déterminations infinitésimales, concerne l'étude des suites et des séries numériques finies. Commencées par l'étude des suites arithmétiques et géométriques, ces recherches se sont poursuivies par le calcul de certaines séries d'entiers qui interviennent, en particulier, dans la détermination des surfaces et des volumes par la méthode d'exhaustion. L'introduction de ces séries dans des livres d'enseignement, comme ceux d'al-Hassâr (XIIe s.), au Maghreb, ou d'Ibn al-Majdî (m. 1447), en Egypte, révèle d'ailleurs leur rôle d'instrument de calcul, notamment dans la résolution de certaines équations.

Beaucoup plus qu'en théorie des nombres, les recherches en géométrie répondaient à la fois à des besoins réels de la société arabo-musulmane et à des exigences internes à la tradition mathématique elle-même. Sur le plan pratique, on peut citer les traités des frères Banû Mûsâ et d'Abû l-Wafâ' en Géodésie et en Arpentage, ceux d'Ibn al-Haytham et d'al-Fârisî en Optique géométrique, d'al-Jazarî et de Taqiyy ad-Dîn en Géométrie mécanique, d'Abu l-Wafâ' et d'al-Kâshî en Architecture et enfin les travaux d'al-Bîrûnî et d'al-Hasan al-Murrâkushî sur la géométrie des instruments astronomiques.

Sur le plan théorique, on peut dégager trois tendances essentielles qui ne concernent pas exclusivement la Géométrie d'ailleurs, mais qui y sont apparus et qui ont, par la suite, bénéficié des progrès de l'Algèbre.

La première de ces tendances est partie des problèmes de la tradition grecque sur la constructibilité des points et des figures du plan : c'est après avoir été souvent confrontés à des problèmes non constructibles que les mathématiciens arabes ont été amenés à élargir la notion d'existence géométrique ou algébrique, par l'utilisation systématique des sections coniques. Cela aboutira, en particulier, aux travaux commencés par Abû l-Jûd et achevés par al-Khayyâm, en vue d'établir une théorie géométrique des équations cubiques.

La seconde de ces tendances a visé l'étude des courbes pour elles-mêmes dans le but d'en connaître les propriétés les plus accessibles, compte tenu des instruments théoriques dont on disposait alors. Cet aspect des recherches géométriques arabes est le moins bien connu à cause de la disparition de certains travaux fondamentaux. Mais l'ignorance de ces travaux a amené certains spécialistes en histoire des sciences à décréter, tout simplement, que les mathématiciens arabes n'avaient pu réaliser aucun progrès en Géométrie et qu'ils étaient même restés en deçà du niveau des grecs.

Pourtant, au vu de certains textes encore existants comme celui de Thâbit Ibn Qurra sur les ellipses ou celui d'as-Sijzî sur les hyperboles et, surtout, au vu des témoignages dignes de foi comme celui d'al-Khayyâm, relatif aux travaux perdus d'Ibn al-Haytham ou celui du philosophe Ibn Bâjja sur l'étude, par son professeur Ibn Sayyid, des courbes de degré supérieur à deux, il parait désormais incontestable que des progrès significatifs ont été réalisés dans ce domaine, même si des facteurs encore extérieurs aux mathématiques arabes ont provoqué la rupture de cette tradition géométrique féconde qui devra attendre parfois le XVIIe siècle pour renaître dans un contexte différent.

La troisième voie suivie par les recherches géométriques arabes est celle qui s'est attachée à résoudre des problèmes de mesure, à l'aide de méthodes et de techniques infinitésimales. Bénéficiant partiellement des écrits d'Archimède, ces recherches débuteront par les travaux des frères Banû Mûsâ sur "*la détermination des surfaces des figures planes et sphériques*" comme l'indique le titre de leur ouvrage collectif. Elles seront poursuivies par Thâbit Ibn Qurra avec ses études sur les paraboles, les ellipses, les paraboloïdes et sur le moment d'inertie d'une barre homogène, puis par son petit-fils, Ibrâhîm Ibn Sinân, qui améliorera les méthodes de raisonnement par l'introduction de la transformation affine. Enfin, dans la seconde moitié du Xe siècle, ou au début du XIe, Ibn al-Haytham étudiera le paraboloïde sphérique en utilisant des propositions arithmétiques sur les séries de puissances que les mathématiciens européens établiront de nouveau au XVIIe siècle.

En conclusion de cette rapide évocation des aspects essentiels de l'apport original des savants des pays d'Islam dans les domaines traditionnels, il faudrait dire quelques mots au sujet de leurs recherches portant sur les fondements des mathématiques et de leurs réflexions sur les objets et les instruments nouveaux introduits à partir du IXe siècle. L'esprit critique avec lequel ces savants ont étudié l'héritage mathématique grec les a amenés à élaborer une réflexion nouvelle sur les fondements de la géométrie d'une part, et sur la nature et le rôle des outils mathématiques, d'autre part.

En Géométrie, une véritable tradition de recherche s'est établie, entre le IXe et le XIIIe siècles, autour du cinquième postulat du livre I des *Eléments* d'Euclide sur lequel repose tout l'échafaudage de la géométrie euclidienne. Parmi les savants qui ont contribué à ces travaux, on peut citer, dans l'ordre chronologique, an-Nayrîzî et Thâbit Ibn Qurra au IXe siècle, Ibn al-Haytham et cUmar al-Khayyâm au XIe, Nasîr ad-Dîn at-tûsî et Muhyî ad-Dîn al-Maghribî au XIIIe.

Prisonnières des méthodes euclidiennes et parfois des conceptions aristotéliciennes, ces recherches ne pouvaient aboutir sans transgresser ces limites. Cela dit, replacées dans le processus continu de l'activité mathématique, ces tentatives apparaissent comme une étape nécessaire à l'avènement des géométries non-euclidiennes. C'est bien ainsi d'ailleurs que les ont perçues les mathématiciens européens, tels que Lambert et Saccheri qui prendront, dans ce domaine, le relais des savants arabo-musulmans.

Quant aux réflexions sur les instruments et les objets mathématiques, elles ont abouti, selon leur nature, à deux formes d'activités. D'un côté, des débats philosophiques et théologiques débordant la spécialité et intéressant beaucoup de non-mathématiciens. Ce fut le cas, par exemple, pour les concepts d'unité, d'infini et de bases non décimales qui ont préoccupé en particulier des savants maghrébins comme Ibn al-Bannâ et Ibn Haydûr. De l'autre côté, des développements théoriques ne sortant pas du cadre de la discipline étudiée et reposant sur ses techniques. Il en fut ainsi des travaux d'Ibrâhîm Ibn Sinân et d'Ibn al-Haytham sur l'analyse et la synthèse et des tentatives de classification des problèmes mathématiques amorcées par al-Karajî et poursuivies par as-Samaw'al dans son Kitâb al-Bâhir fî l-Jabr.

**LES NOUVELLES DISCIPLINES**

C'était là, brièvement exposés, quelques aspects essentiels de la contribution des savants des pays d'Islam dans les domaines traditionnels. Mais la vitalité d'une activité scientifique se mesure aussi et surtout à sa capacité d'entrevoir des domaines nouveaux, de les explorer et, parfois, d'y établir des traditions vivantes. C'est à cet aspect des mathématiques que sera consacrée la dernière partie de cette rapide rétrospective. Il y sera question des premières étapes de la constitution de trois disciplines -l'Algèbre, la Trigonométrie et l'Analyse combinatoire-, trois importants chapitres des mathématiques médiévales qui, sans avoir atteint le même niveau de développement, ont toutes les trois acquis leur autonomie dans le cadre de la science arabe.

**L'algèbre**

En algèbre, le livre d'algèbre d'al-Khwârizmî, intitulé *Kitâb al-Mukhta×ar fî Hisâb al-jabr wa-l-muqâbala* (L'Abrégé du calcul par l'algèbre et la muqabala) a été considéré par les savants postérieurs comme la première pierre dans l'édifice algébrique arabe. En réalité, il apparaît, d'après les quelques indications des bibliographes, que ce projet était en quelque sorte dans l'air vers la fin du VIIIe siècle et que d'autres ouvrages l'ont réalisé à peu près à la même époque. Un de ces écrits, celui d'Ibn Turk, nous est partiellement parvenu mais les autres ont disparu, probablement après qu'ils ont été supplantés par le livre d'al-Khwârizmî puis, plus tard, par des traités encore plus élaborés.

Il est impossible de suivre l'évolution de cette Algèbre depuis ses premiers pas, c'est à dire depuis l'époque où elle se limitait à la résolution des équations de degré inférieur ou égal à deux. Mais, l'étude du contenu de certains manuscrits importants permet de dégager les progrès essentiels qu'elle a connus et qui aboutiront à son autonomie vis-à-vis des autres disciplines (en particulier vis-à-vis de la Géométrie), à l'extension de son domaine et à son intervention croissante comme instrument de résolution de problèmes pratiques ou théoriques.

D'une manière plus précise, on assiste, avec les travaux d'Abû Kâmil et de son école, à l'intervention systématique des nombres réels positifs dans la résolution des équations, à la fois comme coefficients et comme racines, à l'extension des opérations arithmétiques aux inconnues et aux monômes de degré quelconque, préparant la voie à l'élaboration de l'algèbre des polynômes qui sera l'œuvre des successeurs d'Abû Kâmil comme al-Karajî et as-Samaw'al. Grâce à ces instruments nouveaux, rapidement intégrés à l'enseignement supérieur de l'époque, de nouvelles recherches prennent forme et de nouvelles orientations se dessinent : théorie des nombres et analyse indéterminée par l'école d'al-Karajî, théorie des équations cubiques par Abû l-Jûd, al-Khayyâm et Sharaf ad-Dîn at-Tûsî, théorie de l'approximation par Ibn Labbân, at-Tûsî et al-Kâshî. Parallèlement à ces investigations, on observe, à l'intérieur de l'algèbre classique cette fois, une tendance à se libérer de l'emprise de la Géométrie qui a constitué pendant longtemps un frein très sérieux à l'extension des opérations algébriques. Les premiers signes de cette libération se trouvent déjà chez Abû Kâmil qui ne tient plus compte de l'homogénéité dans la manipulation des différentes grandeurs géométriques. A son tour al-Karajî, tout en conservant les preuves géométriques de ses propositions, introduira à leur côté des preuves algébriques. Cet effort sera poursuivi par Sharaf ad-Dîn at-Tûsî qui, raisonnera sur les expressions algébriques des courbes en introduisant, dans l'étude des expressions polynomiales, la transformation affine et l'étude du maximum.

Malgré les fortes résistances d'une tradition très géométrisante, entretenue par l'enseignement, cette tendance à l'algébrisation finira par s'imposer, ici ou là. On en a une preuve indiscutable dans des écrits maghrébins du XIVe siècle : dans les deux ouvrages d'Ibn al-Bannâ qui traitent de questions d'algèbre, c'est à dire le *Rafc al-Hijâb* et le *Kitâb al-Jabr*, les démonstrations accompagnant la résolution des équations classiques, n'ont plus aucun support géométrique, mais sont exprimées dans un langage dépouillé et général immédiatement traduisible en symboles algébriques.

Ce n'est d'ailleurs pas un hasard que ce soit également dans les ouvrages maghrébins des XIVe et XVe siècles que l'on découvre un symbolisme mathématique relativement élaboré et utilisé non seulement dans les chapitres du calcul (fractions, extractions de racines), mais également dans ceux de l'Algèbre (opérations sur les polynômes, résolution d'équations). En attendant des éléments nouveaux, il paraît raisonnable d'attribuer l'invention de ce symbolisme aux mathématiciens maghrébins qui ont été, de toute manière, les seuls aux XIVe-XVIe siècles, à l'avoir utilisé. Ces mathématiciens semblent avoir saisi très vite, d'ailleurs, l'importance de cet instrument puisqu'ils l'ont introduit à tous les niveaux de l'enseignement comme le confirment les ouvrages d'Ibn Ghâzî al-Mknâsî, d'Ibn Qunfudh al-Qasantînî et d'al-Qalasadî.

**La Trigonométrie**

La Trigonométrie a été, dans la science arabe, le produit des multiples activités de recherche qui ont eu lieu dans le cadre de l'Astronomie. A partir, essentiellement, des patrimoines indiens et grecs, cette dernière discipline a connu un développement important entretenu par les nécessités religieuses et économiques et soutenu d'abord par le nouveau pouvoir central arabo-musulman puis par les différents pouvoirs régionaux nés de son éclatement mais fonctionnant à son image.

On peut citer, entre autres sujets de préoccupations de cette Astronomie, les recherches théoriques en vue d'améliorer ou de remplacer le modèle ptoléméen du mouvement des astres, la conception d'instruments astronomiques nouveaux et l'établissement de Zîjs.

Ces Zîjs contenaient en particulier des catalogues d'étoiles, des chronologies locales, différents calendriers utilisés par telle ou telle population de l'empire en fonction de ses croyances ou de ses habitudes. Mais, à côté de cette masse d'informations directement exploitable, il y avait la partie mathématique du Zîj qui comprenait les tables trigonométriques et les méthodes de calcul permettant de déterminer le mouvement des astres et de prévoir certains phénomènes comme les éclipses.

Partant des premiers problèmes trigonométriques de *l'Almageste* de Ptolémée qui reposent sur le théorème de Ménélaüs, certains astronomes arabes ont préféré, pour leurs calculs explicites, utiliser de petites tables de sinus empruntées aux *Siddhanta* indiens et qui s'avéraient plus économiques en temps que les tables de cordes de la tradition grecque. A partir de là, ces savants qui étaient constamment préoccupés par la finesse des approximations et l'optimisation des calculs, vont tout d'abord améliorer les tables de sinus et de cosinus en les étoffant et en affinant les calculs.

Dans un second temps, ils vont introduire de nouvelles lignes trigonométriques comme la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante. Utilisées déjà par Habash al-Hâsib, dans la seconde moitié du IXe siècle, ces nouvelles fonctions verront leurs tables dressées dès le début du Xe, comme cela apparaît chez al-Battânî dans son *Islâh al-Majistî*.

Une troisième étape sera franchie dans la première moitié du Xe siècle avec l'établissement des relations fondamentales entre ces six fonctions trigonométriques. La plus célèbre d'entre elles est la suivante :

**IMAGE 1 ou IMAGE sinus :**

a, b étant des côtés et A, B, les angles opposés à ces côtés, dans un triangle (ABC) tracé sur une sphère et dont les côtés sont des arcs de grands cercles. Cette relation a été surnommée *le théorème qui dispense* parce que, en ne faisant intervenir que quatre grandeurs (alors que celle de Menelaüs en utilise six), elle réduisait ainsi considérablement les temps de calcul pour la confection des tables. Parmi les chercheurs qui ont contribué à ce progrès, il faut citer Abû l-Wafâ' et Ibn Yûnus, pour le centre de l'empire, al-Khujandî, Abû Nasr Ibn cIrâq et al-Bîrûnî, pour l'Asie centrale, Ibn Mucâdh al-Jayyânî et Jâbir Ibn Aflah, pour l'Espagne. Cette répartition géographique révèle d'ailleurs la vitalité de ces recherches et le caractère relativement uniforme du niveau scientifique en pays d'Islam, résultat d'une grande circulation des idées par les livres, par les échanges épistolaires ou par les déplacements des hommes de science eux-mêmes.

Il faut d'ailleurs signaler, à propos de cette relation trigonométrique, que sa découverte a suscité une âpre polémique dont certains aspects nous ont été rapportés par al-Bîrûnî lui-même dans son livre *Maqâlîd cilm al-hay'a*. Cette polémique, qui concernait bien sûr la paternité du résultat nous révèle, à l'occasion, un réseau d'échanges scientifiques et une coopération à distance pour la réalisation de certains projets scientifiques.

La quatrième et dernière étape de l'histoire de la Trigonométrie arabe a débuté par l'apparition de chapitres distincts dans des traités d'astronomie, comme la *Risâla fl-l-qusiyy al-falakiyya* d'Ibn cIrâq ou *l'Almageste* d'Abû l-Wafâ'. Elle s'achèvera par la rédaction d'ouvrages entièrement consacrés à cette matière comme le *Kitâb majhûlât qisiyy al-kura* d'al-Jayyânî et surtout le Kitâb ash-Shakl al-qattâc de Nasîr ad-Dîn at-Tûsî.

**L'analyse combinatoire**

C'est dans un ouvrage maghrébin du XIIIe siècle, le *Fiqh al hisâb d'Ibn Muncim*, qu'apparaît, pour la première fois à notre connaissance dans l'histoire des mathématiques, un chapitre autonome traitant de combinatoire. Mais, pour que ce chapitre s'élabore et apparaisse d 'une manière indépendante, il aura fallu une longue pratique, plus ou moins consciente, qui favorisera l'apparition d'algorithmes de dénombrement et de tentatives de justification des résultats par des démonstrations plus ou moins rigoureuses.

Deux traditions arabes sont à l'origine du développement de cette combinatoire. La première est mathématique. Elle englobe des activités algébriques et astronomiques.

En astronomie, on peut citer le petit traité de Thâbit Ibn Qurra sur la figure sécante dans lequel il généralise le théorème de Ménélaüs ainsi que le *Kitâb maqâlid cilm al-hay'a* d'al-Bîrûnî. Dans les deux ouvrages ce sont des dénombrements élémentaires qui interviennent pour la détermination des relations donnant les éléments inconnus d'un triangle sphérique en fonction des éléments connus. Mais, ni l'un ni l'autre ne se réfère à une quelconque formule combinatoire.

En algèbre, on peut également citer deux ouvrages contenant quelques aspects combinatoires, le *Kitâb at-tarâ'if fî l-hisâb* d'Abû Kâmil et *al-Bâhir fî l-Jabr* d'as-Samaw'al.

Le premier traite de la résolution de certains systèmes d'équations indéterminées, énoncés sous forme de problèmes d’oiseaux : la recherche des solutions utilise, en plus des techniques de l'Algèbre, les dénombrements par énumération d'un ensemble d'entiers. Mais, étant soumis à des contraintes liées au problème, ces dénombrements ne permettaient pas de dégager des règles combinatoires simples

.

Dans le second ouvrage, des éléments de combinatoire interviennent à l'occasion d'une réflexion sur l'algèbre, sur ses objets et sur ses instruments. Mais les dénombrements effectués ne nécessitaient pas l'utilisation ou l'établissement de formules ou de propositions combinatoires.

Cela étant, nous n'avons pour le moment aucun élément nous permettant d'affirmer que ces manipulations combinatoires nécessitées par des problèmes mathématiques, ont suscité une recherche propre à ce domaine avant le XIIIe siècle et, dans le cas où cette recherche, techniquement possible d'ailleurs, a eu lieu, nous ignorons à quels résultats elle a abouti.

En ce qui concerne l'occident musulman et plus particulièrement le Maghreb, c'est plutôt la seconde tradition qui semble avoir été à l'origine de l'énoncé et de l'établissement des premières propositions combinatoires. Il s'agit de l'ensemble des études sur la langue arabe qui englobent la Linguistique, la Lexicographie, la Grammaire et la Métrique. Cette tradition, qui a son origine dans les travaux d'al-Khalîl Ibn Ahmad en Prosodie et en Métrique arabe, sera entretenue et poursuivie par des spécialistes aussi éminents que Sîbawayh, al-Akhfash, Ibn Durayd et Ibn Jinnî. C'est en tout cas à cette tradition que se réfère explicitement le mathématicien maghrébin du XIIIe siècle Ibn Muncim avant d'exposer, dans la onzième section de son livre, les règles générales, soigneusement démontrées, qui permettent de dénombrer, non seulement les mots de la langue arabe, mais également ceux de n'importe quelle langue utilisant un nombre quelconque de lettres et de signes. Dans le problème I, Ibn Muncim établit, à partir d'un ensemble de couleurs de soie qui jouera le rôle de modèle abstrait, une règle permettant de déterminer le nombre de combinaisons de n objets p à p. Pour cela, il construit un tableau numérique triangulaire à l'aide duquel il établit la formule :

**IMAGE Cpn**

Ce faisant, il donne pour la première fois à notre connaissance et selon une démarche strictement combinatoire, le fameux triangle arithmétique, longtemps attribué à Pascal puis à Cardan et que les algébristes du centre de l'empire musulman, comme al-Karajî, avaient déjà obtenu par une méthode algébrique utilisant le développement du binôme. L'étude d'Ibn Muncim se poursuit par l'établissement des formules relatives aux permutations, avec ou sans répétitions, d'un ensemble de lettres ainsi que de la relation de récurrence donnant le nombre de lectures possibles d'un mot de n lettres, compte tenu de tous les signes diacritiques d'une langue (voyelles et sukûn pour l'arabe). Ces résultats et d'autres sur les arrangements et les combinaisons avec répétitions lui permettent de dresser des tableaux qui fournissent, par induction, tous les dénombrements cherchés.

Dans la deuxième moitié du XIIIe siècle ou au début du XIVe, un autre mathématicien maghrébin, Ibn al-Bannâ, reprendra une partie de ces résultats en y ajoutant la proposition suivante dont il revendique d'ailleurs la paternité :

**IMAGE 3**

qui permet de calculer les combinaisons, sans récurrence et sans avoir à construire au préalable le triangle arithmétique.

A partir de là, on décèle dans les écrits maghrébins deux progrès significatifs au regard de l'histoire de cette discipline : en premier lieu, l'extension du champ d'application du formulaire connu et des raisonnements combinatoires. En second lieu, une prise en compte des problèmes de dénombrement en général dans des domaines très variés et pas toujours mathématiques.

Pourtant si, à nos yeux, une matière avec des instruments nouveaux semble objectivement se constituer, nous ignorons le degré de conscience qu'en avaient ceux qui ont contribué à sa naissance. En tout cas, cela n'est pas allé jusqu'à donner un nom à cette activité et à la distinguer des disciplines traditionnelles et en particulier de l'Arithmétique.

**CONCLUSION**

Pour conclure, il nous a semblé intéressant d'aborder un sujet méconnu qui pourrait sembler être le revers de la médaille mais qui n'est qu'un aspect de l'activité scientifique. Il s'agit des obstacles rencontrés par les mathématiciens des pays d'Islam et les échecs qui s'en suivirent et qui revêtirent des formes très variées : hypothèses erronées ou jugées comme telles, propositions fausses, problèmes non résolus, tentatives fécondes mais restées inachevées, etc...

Autant que les succès, ces échecs peuvent révéler, lorsqu'ils sont replacés dans leurs contextes scientifiques et culturels, les entraves techniques et sociologiques auxquelles s'est heurtée parfois la recherche. Ils justifient également la nécessité d'une double analyse, interne et externe, de l'activité scientifique arabe afin d'éviter les jugements partiels et les présupposés idéologiques sur certains aspects controversés de la civilisation arabo-musulmane, comme ceux qui accompagnent habituellement le concept de crise ou celui de décadence.

Les chercheurs arabes du Moyen-âge, comme les autres, semblent répugner à évoquer les échecs dans leurs disciplines, sauf dans deux cas précis : lorsqu'une véritable tradition, dans laquelle ils sont parfois impliqués, a consacré en quelque sorte le caractère ouvert du problème. C'est la cas, par exemple, du mathématicien du XIIIe siècle Ibn al-Khawwâm qui conclut son livre*al-Fawâ'id al-bahâ'iyya fî l-qawâcid al-hisâbiyya*, par une liste de trente deux problèmes algébriques ou diophantiens non résolus, en faisant remarquer, avec prudence, qu'il n'a pas pu prouver l'impossibilité de ces problèmes, mais qu'il est possible que des chercheurs plus qualifiés en viennent à bout. On apprécie d'autant plus sa remarque, aujourd'hui, que les équations n° 3 et n° 23 de cette liste sont les deux premiers cas de la fameuse conjecture de Fermat qui a suffisamment préoccupé les savants arabes, depuis le Xe siècle au moins, pour qu'elle ait mérité d'être mentionnée régulièrement dans les ouvrages scientifiques, d'abord par Ibn Sînâ dans son *Livre de la guérison*, puis par az-Zanjânî et Ibn al-Khawwâm et même au XVIe siècle par Bahâ' ad-Dîn al-cAmilî. Il nous est même parvenu une tentative de démonstration de son impossibilité pour n=3.

La seconde circonstance qui a poussé les chercheurs à lever le voile sur les obstacles à leur recherche est celle où cette évocation leur a permis de mettre en valeur leur contribution personnelle et donc leur réussite. C'est ainsi, par exemple, que cUmar al-Khayyâm, avant de développer sa théorie géométrique des équations cubiques, rappelle l'impuissance d'al-Mâhânî à résoudre l'équation du 3e degré issue d'un problème d'Archimède qu'il avait exprimé, pour la première fois, algébriquement, et il détaille les erreurs commises par Ab‚-l-J‚ dans l'étude d'un problème d'existence.

En écrivant cela au XIIe siècle, al-Khayyâm révèle en fait, à travers l'échec de tel ou tel individu, les limites d'une certaine mathématique, celle qui a reposé fondamentalement sur des conceptions et sur un savoir-faire grecs et qui a fonctionné dans un certain univers philosophique et théologique.

Il y eut pourtant des moments où les frontières de cette mathématique ont été transgressées, inaugurant ainsi des démarches tout à fait nouvelles, fécondes en résultats techniquement accessibles et qui ne verront pourtant pas le jour. Il en fut ainsi pour la tentative de Thâbit Ibn Qurra "d'actualiser" les infinis en comparant des ensembles infinis dénombrables, ou celle d'as-Sijzî, au Xe siècle, d'élaborer un modèle héliocentrique se substituant au modèle géocentrique traditionnel qui était conforme à la conception du monde des philosophes de l'époque et aux exégèses théologiques.

Il ne semble pas que ces démarches audacieuses aient valu à leurs auteurs une quelconque inquisition, à l'image de celles que subiront plus tard des savants européens comme Galilée et Giordano Bruno. En tout cas, les historiens ne nous ont transmis aucune information à ce sujet. Mais, cela n'a pas évité l'échec de ces tentatives puisqu'elles seront abandonnées par la communauté scientifique elle-même pour des raisons qui, sans être tout à fait extérieures à la science, semblent induites essentiellement par l'environnement socioculturel et la conception du monde qui y domine.

Il y a enfin un dernier aspect des limites qu'a connues l'activité mathématique arabe et qui se rattache à deux types de perturbations graves que connaîtront les sociétés musulmanes : en premier lieu, les crises politiques internes et, à partir du XIe siècle, les affrontements externes qui se traduiront par un rétrécissement de l'aire géopolitique musulmane et par la perte de son hégémonie commerciale internationale.

L'effet indirect de ces phénomènes sur l'activité mathématique sera, à moyen terme, une rupture des traditions naissantes qui n'auront pas le temps d'acquérir la vigueur des anciennes. C'est le cas, au XIe siècle, des travaux d'Ibn Sayyid d'Espagne, sur les courbes gauches et les courbes planes de degré supérieur à trois, qui seront poursuivis par Ibn Bâjja puis très vite abandonnés. C'est probablement le cas, au XIIIe siècle, de la recherche en Analyse combinatoire.

Ces tentatives, résultats d'un long processus de maturation, verront le jour à des époques où les sociétés qui les ont vu naître (andalouse pour l'une, maghrébine pour l'autre) n'étaient plus aptes à favoriser leur développement ni même leur transmission parce qu'elles ne pouvaient plus leur garantir les conditions d'une activité scientifique normale.

Mais, à long terme, les conséquences sont plus graves encore puis qu'on observe un ralentissement de la recherche, dans toutes les disciplines mathématiques, accompagnée d'une baisse relative du niveau de l'enseignement. Le contenu des ouvrages des XVe-XVIe siècles, produits en Egypte ou au Maghreb, illustrent bien ce phénomène dont les origines sont en fait plus lointaines puisque déjà à la fin du XIIIe siècle ou au début du XIVe; Ibn al-Bannâ lui-même justifiait l'abandon de certains chapitres mathématiques comme celui des nombres premiers ou celui des méthodes d'approximation de la racine nième, pour n supérieur à trois, par leur peu d'utilité à son époque.

**BIBLIOGRAPHIE**

Aballagh, M.: *Le Rafc al-hijâb d'Ibn al-Bannâ*. Thèse de Nouveau Doctorat. Université de Paris I-Pantheon-Sorbonne. 1988.

Bouyahya, Ch.: *La vie littéraire sous les Zirides*. Thèse de doctorat. Tunis, S.T.D., 1972.

Debarnot, M.Th.: *La trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du Xe siècle*. Damas, Institut Français de Damas, 1985.

Djebbar, A. & Rashed, R.: *L'œuvre algébrique d'al-Khayyâm*. Alep, I.H.A.S., 1981.

Djebbar, A. : *Le phénomène de traduction et son rôle dans le développement des activités scientifiques en pays d'Islam*. In : *Les Ecoles savantes en Turquie: Sciences, philosophie et arts au fil des siècles*. Actes des journées d'Ankara (24-29 Avril 1995). Istanbul, Isis, 1996, pp. 93-112.

Djebbar, A.: *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIe-XIVe siècles*. Paris, Publications mathématiques d'Orsay, 1981, n° 81-02, pp. 34-37.

Djebbar, A.: *L'analyse combinatoire au Maghreb : l'exemple d'Ibn Muncim (XIIe-XIIIe siècles)*. Paris, Publications Mathématiques d'Orsay, n° 85-01, 1985.

Djebbar, A.: *Les Mathématiques au Maghreb à l'époque d'Ibn al-Bannâ*. Colloque International de la Société de Philosophie au Maroc sur *Mathématiques et Philosophie*. Rabat, 1-4 Avril 1982. Parue dans les actes du Colloque. Société de Philosophie au Maroc (éditeur). Paris, l'Harmattan - Rabat, Okad. 1987. pp. 31-46.

Djebbar, A.: *Mathématiques et Mathématiciens du Maghreb médiéval (IXe-XVIe siècles) : Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman.* Thèse de Doctorat. Université de Nantes-Université de Paris-Sud, 1990. Vol. II.

Eche, Y.: *Les bibliothèques arabes*. Thèse de doctorat. Paris, Sorbonne, 1949.

Jaouiche, K.: *La théorie des parallèles chez les Arabes*, Paris, Vrin, 1985.

Karpova, L. & Rosenfeld, B.: The treatise of Thâbit Ibn Qurra on section of cylinder and on its surface. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* n° 94, 1974, p. 66-72.

Kennedy, E.S.: Late medieval planetary theory, *Isis*, 1966, vol.57, 3, n°189, pp. 365-378;

King, D.A.: Ibn Yûnus very useful tables for reckoning time by the sun. *Archives for the History of Exact Sciences*, vol.10, n°3-5, 1973, pp. 342-394.

Rashed, R.: *Entre Arithmétique et Algèbre*. Paris, Les Belles lettres, 1984.

Rosenfeld, B.: *Geometrical transformations in the medieval East*. in: XIIe Congrès International d'Histoire des Sciences.III, A, 1971, pp. 123-131.

Sayili, A.: *Logical necessities in mixed equations by cAbd al-ºam¬d Ibn Turk and the algebra of his time*. Ankara, 1962.

Sédillot, J. J.: *Traité des instruments astronomiques des Arabes*. Paris, 1834-35, vol. 1-2.

Suter, H.: Uber die Geometrie der Sohne des Mûsa ben Shakir. *Bibliotheca Mathematica*, **3**, F.3, 1902, pp. 259-272.

Taton, R.: *Histoire générale des sciences*. Paris 1957, pp. 455-456.

Woepcke, F.: Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Abî l-Wafâ. *Journal Asiatique*, **5**, 1855, pp. 218-256 et 309-359.

Woepcke, F.: Notice sur une théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs. *Journal Asiatique*, série 4, 20, 182.

Youschkevitch, A.P. : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles)*. Paris, Vrin 1976.