**Les mathématiques aujourd’hui**

*le 29 juin 1999*

Dominique Tournès

(Professeur en mathématiques à l'IUFM Réunion)

L’an 2000 a été proclamé " année mondiale des mathématiques " par l’UNESCO. Partout, pendant un an, il y aura des conférences, des expositions et même des affiches dans le métro qui vont parler de mathématiques. Pourquoi une telle décision qui peut vous paraître surprenante ? L’objectif est tout simplement de faire mieux connaître cette discipline auprès du grand public. Les mathématiques en ont bien besoin : un grand nombre d’individus quittent l’école en conservant un mauvais souvenir d’une discipline qu’ils ne comprennent pas, dont ils ne voient pas l’intérêt au-delà des calculs simples de la vie quotidienne, qu’ils perçoivent comme un outil de sélection et, pour tout dire, qui les a fait beaucoup souffrir.

Ce soir, en anticipant un peu sur l’an 2000, je voudrais tenter de vous décrire ce que sont vraiment les mathématiques, d’où elles viennent et à quoi elles servent. Je voudrais aussi vous parler un peu des mathématiciens : qui sont ces êtres étranges et en quoi consiste leur travail ?

*Pour aller plus loin*

*Sur l’année mondiale des mathématiques :*

<http://acm.emath.fr/amm/>

*sur les représentations des mathématiques chez les élèves et les enseignants :*

**[http://PedagoPsy.eu/mathematique.htm](http://pedagopsy.eu/mathematique.htm)**

**1. Les mathématiques viennent de loin**

Je ne peux pas vous parler des " mathématiques aujourd’hui " — c’est le titre de la conférence — sans vous parler d’abord des mathématiques d’hier. Comme la plupart des activités humaines, les mathématiques s’inscrivent dans une longue tradition. Je vais vous présenter brièvement leur histoire en distinguant quatre époques principales.

**a) Les mathématiques égyptiennes et babyloniennes (de 2000 av. J.-C. à 300 av. J.-C.)**

Les mathématiques sont couramment définies comme la science du nombre et de l’étendue. Dans l’Antiquité, on y rattachait non seulement l’arithmétique et la géométrie, mais aussi l’astronomie et la musique. Les mathématiques sont apparues très tôt, dès le début du deuxième millénaire avant notre ère, en Mésopotamie et en Égypte. C’est d’ailleurs au même endroit qu’est née l’écriture, vers 3500 av. J.-C., pour les besoins de la gestion des États centralisés qui se sont développés dans ces civilisations. Les premiers textes mathématiques que l’on a retrouvés, datés de 2000 av. J.-C., montrent des compétences en calcul (comptabilité, impôts, héritages) et en géométrie (arpentage des terrains, mesure des aires et des volumes). Plus tard, surtout à Babylone, les besoins de l’astronomie (calendriers, prévision des éclipses, astrologie) ont entraîné l’apparition de mathématiques beaucoup plus savantes. Par exemple, c’est de là que vient le système sexagésimal (de base soixante) que nous utilisons encore aujourd’hui pour la mesure du temps et des angles (1 heure ou 1 degré = 60 minutes, 1 minute = 60 secondes).

*Pour aller plus loin*

- sur les mathématiques égyptiennes :

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Egypte.html>

- sur les mathématiques babyloniennes :

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Babylone.html>

**b) Les mathématiques grecques, indiennes et chinoises (de 700 av. J.-C. à 700 apr. J.-C.)**

Il vaut mieux parler de mathématiques " en grec " plutôt que de mathématiques grecques, car il s’agit de mathématiques élaborées tout autour de la Méditerranée et au Moyen-Orient par des savants d’ethnies et de langues diverses.

Les Grecs ont d’abord appris les mathématiques de leurs voisins du Proche-Orient. Dans la première période (de 700 av. J.-C. à 300 av. J.-C.), de nombreux savants grecs (Thalès, Pythagore, Platon, Eudoxe, etc.) ont fait le voyage de l’Égypte et de Babylone pour recueillir le savoir des prêtres et des scribes. Puis, à partir de la conquête d’Alexandre le Grand (vers 330 av. J.-C.), la civilisation grecque se répand dans un empire très vaste qui s’étend jusqu’aux confins de la vallée de l’Indus. Partout, les élites se mettent à parler et à écrire en grec. Le grec devient la langue des mathématiques jusque vers l’an 700. Le principal foyer scientifique est alors Alexandrie, avec son Musée et sa Bibliothèque.

À partir du sixième ou du cinquième siècle avant notre ère, les Grecs ont systématisé l’idée de démonstration, qui permet d’obtenir des énoncés exacts valables dans tous les cas imaginables où sont vérifiées les hypothèses admises (les axiomes). Avec Platon, les objets mathématiques deviennent des objets idéaux qui se détachent du monde sensible, puis Aristote met en place des règles de logique qui permettent de conduire des raisonnements déductifs de façon normalisée et incontestable. Ces règles n’ont guère varié jusqu’à nos jours.

La logique et la géométrie constituent les principaux apports des Grecs. Les deux ouvrages majeurs qui marquent les mathématiques grecques sont les *Éléments* d’Euclide, dans les domaines de la théorie des nombres et de la géométrie, et l’*Almageste* de Ptolémée, qui sera l’ouvrage de référence des astronomes jusqu’à l’époque de Copernic.

Parallèlement aux mathématiques grecques, il faut dire un mot des mathématiques indiennes et chinoises. Du premier siècle av. J.-C. au cinquième siècle apr. J.-C., à l’époque des royaumes Açoka et Gupta, les mathématiques indiennes sont florissantes. Les Indiens ont vraisemblablement hérité des connaissances grecques et babyloniennes, et sont devenus experts dans le domaine du calcul, en particulier du calcul astronomique. On leur doit notamment le système décimal de position et l’introduction du zéro. En trigonométrie, ils ont introduit la fonction sinus, qui a remplacé l’emploi des cordes de l’astronomie babylonienne et grecque.

De même, les mathématiques chinoises se sont développées au moins à partir du premier siècle av. J.-C. (nos connaissances à ce sujet sont assez vagues, faute de chronologie précise et par manque de documents écrits). Le premier traité chinois de mathématiques, le *Jiuzhang Suanshu*, révèle déjà une science élaborée : numération décimale, extraction des racines carrées et cubiques, équations polynomiales à une ou plusieurs inconnues, résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss (qui ne sera trouvée en Occident qu’au dix-huitième siècle). Mais on ne sait pas bien quels ont été les contacts des Chinois avec les autres civilisations dans l’Antiquité.

*Pour aller plus loin*

- sur les mathématiques grecques :

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Grece.html>

- sur les mathématiques indiennes :

[http://India.CoolAtlanta.com/GreatPages/sudheer/maths.html](http://india.coolatlanta.com/GreatPages/sudheer/maths.html)

- sur les mathématiques chinoises :

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/china.html>

**c) Les mathématiques arabes (de 800 à 1600)**

Les Arabes sont les héritiers directs des Grecs. Vers la fin du huitième siècle, ils ont conquis les anciens territoires sous influence grecque, l’arabe est devenu progressivement la langue scientifique de la Méditerranée et du Moyen-Orient, et les principaux traités grecs ont été traduits en arabe. Les Arabes ont travaillé dans tous les domaines cultivés par les Grecs. Ils ont enrichi aussi bien la théorie des nombres que la géométrie, et ont créé une discipline nouvelle : l’algèbre. L’inventeur de l’algèbre est al-Khwarizmi (son nom, traduit en latin par Algorismus, est à l’origine du mot " algorithme " et le début du titre d’un de ses traités, *al-jabr*, a donné le mot " algèbre ").

Les Arabes ont eu des contacts importants avec les civilisations indienne et chinoise. Ils ont conquis une partie de l’Inde (qui deviendra le sultanat de Delhi) et ils ont toujours été en relation avec la Chine par les routes de la soie. Dès le huitième siècle, les marchands arabes tiennent des comptoirs à Canton. Plus tard, lors des invasions mongoles, les Mongols amèneront avec eux des commerçants et des savants chinois vers l’Ouest. De façon générale, les échanges sont très importants entre le monde arabe, l’Inde et la Chine. Au point de vue mathématique, les connaissances se sont transmises par deux canaux : d’une part, celui des commerçants, qui permet une confrontation des systèmes de numération et des pratiques opératoires, d’autre part, celui des astronomes, qui est l’occasion d’échanges de mathématiques plus savantes (l’empereur de Chine a régulièrement engagé pour son observatoire des astronomes indiens puis arabes ; inversement, à l’époque mongole, des astronomes chinois sont allés travailler dans les observatoires d’Asie Centrale).

En ce qui concerne l’Europe, il y a eu trois voies de communication avec le monde arabe : l’Espagne musulmane, la Sicile et les Croisades. Par ces trois voies, les mathématiques arabes ont été peu à peu transmises à l’Europe. En particulier est arrivé le calcul indien, avec les chiffres dits " arabes " et la pratique de poser les opérations sur le papier.

*Pour aller plus loin*

- sur les mathématiques arabes :

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Islam.html>

- sur l’algèbre d’al-Khwarizmi et sa transmission à l’Europe :

<http://www.lib.virginia.edu/science/parshall/algebraII.htm>

**d) Les mathématiques européennes (de 1200 à 1945)**

Pendant le douzième siècle, un effort intense est réalisé pour traduire en latin les ouvrages arabes (y compris les traductions arabes des anciens ouvrages grecs). L’Europe va ensuite connaître un développement original et autonome à partir du treizième siècle. Un des premiers mathématiciens significatifs est Léonard de Pise, dit " Fibonacci ", qui a fait ses études en Afrique du Nord et qui publie en 1202 un livre intitulé *Livre de l’abaque*. Ce livre présente pour la première fois les éléments du calcul indien et de l’algèbre arabe. Il va être à l’origine de l’école algébrique italienne qui s’illustrera plus tard, au seizième siècle, par la résolution des équations du troisième et du quatrième degré, et par l’invention des nombres complexes.

À partir du quinzième siècle, les civilisations arabes, indiennes et chinoises se referment sur elles-mêmes et, en particulier, se sclérosent dans le domaine scientifique. L’Europe prend le relais. C’est l’époque des grandes découvertes : les navires européens partent à la conquête du monde. En mathématiques, tout se passera désormais en Europe. Diverses écoles nationales vont briller à tour de rôle. Tout commence, comme nous l’avons vu, avec l’école algébrique italienne de la Renaissance (Cardan, Ferrari, Tartaglia, Scipione del Ferro, Bombelli). La France se hisse ensuite au premier plan avec Viète, Descartes, Pascal et Fermat. En inventant la géométrie analytique, Descartes réalise la synthèse entre la géométrie grecque et l’algèbre arabe. Les mathématiciens français du dix-septième siècle, sans doute par manque d’audace, passent pourtant à côté d’une invention majeure : c’est l’Anglais Isaac Newton (peut-être le plus grand mathématicien de tous les temps) qui, vers 1670, crée le calcul différentiel et intégral, c’est-à-dire un calcul permettant de traiter de l’infini et du mouvement, domaines dans lequel les Grecs et les Arabes avaient échoué. On peut voir là l’acte de naissance des mathématiques modernes. Les savants disposent désormais d’un moyen d’aborder efficacement les problèmes posés par la mécanique et la physique. Le dix-huitième, le dix-neuvième et la première moitié du vingtième siècle seront ensuite le théâtre d’une intense rivalité entre l’école française et l’école allemande, jusqu’à la tragédie des deux guerres mondiales.

À partir de 1945, commence une nouvelle époque. Le centre des mathématiques se situe désormais aux États-Unis et les mathématiques, partout dans le monde, s’écrivent en anglais.

*Pour aller plus loin*

- sur l’histoire des mathématiques depuis la Renaissance :

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/>

- sur Viète et la naissance de l’algèbre symbolique :

<http://www.district-parthenay.fr/parthenay/creparth/GUICHARDJp/VIETEaccueill.html>

- sur Descartes et la géométrie analytique :

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Descartes.html>

- sur Isaac Newton et l’invention du calcul infinitésimal :

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Newton.html>

**2. Les mathématiques sont omniprésentes**

Pour vous montrer maintenant ce que sont les mathématiques d’aujourd’hui, je vais passer en revue quelques-uns de leurs secteurs d’intervention actuels. J’ai dû faire un choix parmi une multitude de sujets possibles, tellement les mathématiques sont partout.

**a) Des sections de cône aux vols spatiaux**

Après la droite et le cercle, les courbes les plus simples de la géométrie classique sont les coniques, obtenues en coupant un cône de révolution par un plan ; selon la valeur de l’angle du plan avec l’axe du cône, on obtient une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Les sections coniques ont été étudiées par les Grecs dès le quatrième siècle av. J.-C. Une synthèse de leurs travaux se trouve dans *Les coniques* d’Apollonius, ouvrage écrit vers le début du deuxième siècle av. J.-C. Une partie de l’intérêt des Grecs pour les coniques provenait de leurs propriétés optiques, qui sont à la base de la construction des " miroirs ardents " (Archimède aurait conçu de tels miroirs pour incendier la flotte romaine lors du siège de Syracuse). Ces propriétés optiques sont encore très utilisées aujourd’hui (four solaire de Font-Romeu, miroirs paraboliques des télescopes, antennes paraboliques qui concentrent les ondes hertziennes au foyer, etc.).

On retrouve les sections coniques au moment de la Renaissance, lorsque les peintres mettent au point les lois de la perspective. En effet, ce que voit l’œil est constitué par un faisceau conique de rayons lumineux, et projeter ce faisceau sur le plan du tableau revient à réaliser une section plane d’un cône.

Au dix-septième siècle, on découvrit un lien nouveau entre les coniques et la physique, d’une part lorsque Galilée établit que la trajectoire d’un point pesant lancé dans le vide était une parabole, d’autre part lorsque Johannes Kepler, à partir des observations précises de Mars par Tycho Brahe, énonça sa première loi, selon laquelle le mouvement des planètes se fait sur des ellipses dont l’un des foyers est occupé par le Soleil. Newton montra que ces mouvements terrestres et célestes résultent d’un unique et même principe, la loi de l’attraction universelle. L’étude des conséquences de la théorie de Newton occupa les plus grands mathématiciens pendant les dix-huitième et dix-neuvième siècles. En 1759, Alexis-Claude Clairaut parvint à prévoir par le calcul la date du retour de la comète de Halley. En 1845, l’existence d’une nouvelle planète du système solaire, Neptune, fut prédite indépendamment par le Français Urbain Le Verrier et l’Anglais John Couch Adams à partir des différences notées entre les mouvements observés et les mouvements calculés de la planète Uranus. Moins d’un an après, Neptune fut observée par l’astronome allemand Johann Galle à l’endroit annoncé par Le Verrier : ce fut un triomphe pour la mécanique céleste.

Les satellites artificiels constituent aujourd’hui l’une des principales applications des lois de Kepler. Spoutnik, le premier satellite artificiel, fut mis en orbite autour de la Terre en octobre 1957 par les Soviétiques, et précéda des centaines d’autres satellites civils et militaires, dont certains ont été habités (navette spatiale américaine, station Mir russe). Des satellites automatiques, équipés de télescopes, observent l’espace profond ; d’autres, tournés vers la Terre, en mesurent le rayonnement visible, infrarouge ou radio, au bénéfice d’une quantité impressionnante d’applications à l’agriculture, à la météorologie, etc. ; d’autres encore servent de relais aux télécommunications terrestres.

La Terre n’est pas sphérique ; son renflement équatorial et les irrégularités du champ de gravité déforment les orbites des satellites. En analysant les perturbations des orbites, on peut déterminer le géoïde avec une précision de l’ordre du centimètre. Grâce à un réseau de satellites et de récepteurs au sol, on peut désormais localiser une position quelconque à la surface du globe à quelques centimètres près et obtenir des images à haute résolution (système américain GPS ou " Global Positioning System ", satellite français SPOT).

*Pour aller plus loin*

- sur les sections coniques :

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Coniques/Index_coniques.html>

- sur les lois de Kepler et l’attraction universelle de Newton :

<http://www.educnet.education.fr/orbito/orb/meca/meca1.htm>

- sur les satellites et leurs applications :

<http://www.cnes.fr/activites/>

**b) De la théorie des nombres à la cryptographie**

La cryptographie a toujours été l’apanage des militaires et des espions. Aux États-Unis, la NSA ou " National Security Agency ", agence officielle chargée de la cryptographie, cultive le mystère dans ses immenses bâtiments grisâtres près de Washington, au point qu’on ignore son budget et ses effectifs réels. Il paraît qu’elle emploierait un millier de mathématiciens.

Deux missions sont confiées à ces spécialistes des codes secrets : d’une part, imaginer des moyens pour communiquer avec une discrétion garantie, d’autre part, trouver les moyens de " casser " les codes des confrères. Dans les deux cas, ce sont les spécialistes de la théorie des nombres qui font la pluie et le beau temps.

L’un des système de cryptage les plus performants est le RSA, système à clé publique. Son principe repose sur une propriété des nombres premiers. Prenez deux nombres premiers de bonne taille (disons 100 chiffres) et multipliez-les. Le produit est un nombre à 200 chiffres, facile à obtenir avec un ordinateur. Par contre, l’opération inverse est quasiment impossible : avec une trentaine de gros ordinateurs travaillant sans relâche pendant dix jours, il faudrait des siècles de calcul pour décomposer un nombre de 200 chiffres. Le code RSA repose sur les simples remarques précédentes : le produit des deux nombres premiers sert à crypter et il peut être rendu public, mais je suis le seul à connaître les facteurs et donc à pouvoir réaliser le décodage !

Le cryptage des données est fondamental à l’heure actuelle en raison du développement des nouvelles technologies de la communication. Sur Internet, les entreprises, voire les particuliers, souhaitent pouvoir transmettre leurs données en toute sécurité. Se pose aussi le problème du paiement sécurisé pour les transactions. Jusqu’à janvier dernier, la France était l’un des derniers pays à limiter considérablement l’usage de procédés de cryptographie. Désormais, le seuil de cryptographie libre est relevé de 40 bits à 128 bits.

*Pour aller plus loin*

- sur la cryptographie et le code RSA :

<http://www.pourlascience.com/numeros/pls-267/logique.htm>

- sur la théorie des nombres :

<http://www.maths.uq.edu.au/~krm/ntw/web.html>

**c) Le problème des erreurs d’arrondi**

Je prendrai comme exemple suivant le problème des erreurs d’arrondi, pour la bonne raison qu’un jeune Réunionnais, Fabrice Nativel, vient juste de soutenir une thèse sur le sujet. Les erreurs d’arrondi représentent une difficulté inhérente à tout calcul numérique. En effet, les nombres utilisés par les mathématiciens sont des nombres idéaux, qui s’écrivent avec une infinité de chiffres après la virgule, et donc qui n’existent pas dans la réalité, même si, par une sorte d’ironie de l’histoire, on les appelle les " nombres réels ". Dans la pratique, on ne peut travailler qu’avec un ensemble fini de nombres très simples (en général un sous-ensemble assez restreint de l’ensemble des nombres décimaux) et, à chaque instant, il faut remplacer le résultat théorique, idéal, inaccessible d’un calcul par l’un des nombres simples dont on dispose concrètement, d’où une erreur inévitable appelée " erreur d’arrondi ".

Voici deux exemples de désastres causés par une mauvaise gestion des erreurs d’arrondi :

1) Le 25 février 1991, pendant la Guerre du Golfe, une batterie américaine de missiles Patriot, à Dharan (Arabie Saoudite), a échoué dans l’interception d’un missile Scud irakien. Le Scud a frappé un baraquement de l’armée américaine et a tué 28 soldats. La commission d’enquête a conclu à un calcul incorrect du temps de parcours, dû à un problème d’arrondi. Les nombres étaient représentés en virgule fixe sur 24 bits. Le temps était compté par l’horloge interne du système en 1/10 de seconde. Malheureusement, 1/10 n’a pas d’écriture finie dans le système binaire : 1/10 = 0,1 (dans le système décimal) = 0,0001100110011001100110011… (dans le système binaire). L’ordinateur de bord arrondissait 1/10 à 24 chiffres, d’où une petite erreur dans le décompte du temps pour chaque 1/10 de seconde. Au moment de l’attaque, la batterie de missile Patriot était allumée depuis environ 100 heures, ce qui avait entraîné une accumulation des erreurs d’arrondi de 0,34 s. Pendant ce temps, un missile Scud parcourt environ 500 m, ce qui explique que le Patriot soit passé à côté de sa cible.

2) Le 4 juin 1996, une fusée Ariane 5 a explosé 40 secondes après l’allumage. La fusée et son chargement avaient coûté 500 millions de dollars. La commission d’enquête a rendu son rapport au bout de deux semaines. Il s’agissait d’une erreur de programmation dans le système inertiel de référence. À un moment donné, un nombre codé en virgule flottante sur 64 bits (qui représentait la vitesse horizontale de la fusée par rapport à la plate-forme de tir) était converti en un entier sur 16 bits. Malheureusement, le nombre en question était plus grand que 32768, le plus grand entier que l’on peut coder sur 16 bits, et la conversion a été incorrecte.

Vu les enjeux économiques et humains que cela représente, vous comprenez sans doute maintenant pourquoi on développe des recherches importantes pour maîtriser le problème crucial des erreurs d’arrondi.

*Pour aller plus loin*

- sur les erreurs d’arrondi et les désastres qu’elles provoquent :

<http://www-anp.lip6.fr/~jmc/jmc95-2.html>

<http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/>

- sur le calcul scientifique et ses applications :

<http://www.ann.jussieu.fr/rapportCS/RapportCS.html>

**d) La modélisation et la simulation dans les sciences**

Beaucoup de scientifiques contemporains tentent de comprendre le monde en fabriquant des répliques intelligibles des objets qu’ils observent, c’est-à-dire au moyen de la simulation. Avec les systèmes de traitement de l’information, autrement dit avec les ordinateurs, cet usage de la simulation a pris un essor considérable car, en principe, n’importe quel processus matériel peut désormais être mimé.

Ainsi, dans l’économie, les mathématiques jouent un rôle direct de plus en plus important grâce au développement de l’informatique et du calcul scientifique, et aux possibilités de modélisation et de simulation qui en résultent. On utilise de gros ordinateurs pour simuler les circulations fluides dans l’atmosphère et prévoir le temps qu’il fera, pour des problèmes stratégiques, pour analyser presque instantanément l’état des marchés boursiers et tirer profit de minimes écarts de cours. Avec une puissance de calcul suffisante, on peut remplacer des essais coûteux par des simulations numériques : le calcul des déformations d’une voiture lors d’un choc est plus avantageux que la destruction de centaines de véhicules. En aéronautique, les simulations numériques remplacent peu à peu — ou du moins limitent — les essais traditionnels en soufflerie. Une autre application se trouve dans les simulateurs de vol destinés à la formation des pilotes : cette formation est moins coûteuse et évidemment moins dangereuse que si l’on utilisait des vols réels. Il en va de même des explosions nucléaires : presque partout dans le monde, on a arrêté les essais réels pour des raisons économiques et écologiques (en France, les derniers essais ont eu lieu en 1995 après l’élection de Jacques Chirac). Enfin, la simulation est incontournable lorsqu’il n’est pas possible d’expérimenter réellement : par exemple, on simule des phénomènes astronomiques ou géologiques, pour en contrôler et en faire varier les paramètres, afin de découvrir des lois que la majestueuse lenteur de la nature ne permet pas d’appréhender à l’échelle de temps d’une thèse. En introduisant dans un ordinateur les équations du mouvement et les conditions initiales, toujours très simplifiées, puis en faisant tourner la machine pendant des heures, on peut ainsi reconstituer rapidement l’évolution d’un phénomène sur des millions d’années.

*Pour aller plus loin*

- sur la modélisation et la simulation :

<http://www.canal-u.education.fr/canalu/affiche_programme.php?programme_id=173&vHtml=1>

**3. Les mathématiciens sont des passionnés**

Après ce rapide panorama des mathématiques et de quelques-uns des problèmes qu’elles tentent de résoudre, je veux vous parler un peu des mathématiciens d’aujourd’hui. Qui sont-ils ? Comment travaillent-ils ?

**a) La communauté des mathématiciens**

Actuellement, il y a environ 50 000 mathématiciens en activité dans le monde. À titre de comparaison, on peut se reporter au célèbre Congrès de Paris de 1900 au cours duquel Hilbert avait formulé ses 23 grands problèmes pour le vingtième siècle. Ce congrès regroupait environ 150 participants, et l’on estime qu’il y avait là environ les deux-tiers de tous les mathématiciens mondiaux faisant de la recherche à cette époque. Ce qui est impressionnant et qu’il faut bien méditer, c’est qu’il y a plus de mathématiciens vivants que morts.

Depuis 1950, on assiste à une progression exponentielle de la production mathématique. Entre 1950 et aujourd’hui, on a inventé plus de mathématiques nouvelles que depuis l’origine de l’humanité jusqu’à 1950. Pendant la dernière décennie, 80 000 articles de recherche ont paru tous les ans dans 500 revues périodiques (il y avait seulement 5 000 articles par an en 1950). Pour permettre de se repérer dans cette littérature foisonnante, des journaux uniquement consacrés à répertorier les autres publications ont été créés. Le plus connu, *Mathematical Reviews*, atteint presque 4 000 pages par an, et les articles y sont classés en une soixantaine de spécialités, divisées en 3 400 sous-spécialités. En général, un mathématicien travaille dans l’une de ces 60 spécialités et ignore presque tout des autres. Maintenant, de plus en plus, les mathématiciens communiquent entre eux par l’intermédiaire du courrier électronique et diffusent leurs travaux sur Internet avant de les publier dans les revues traditionnelles ; on commence même à voir des revues entièrement électroniques.

Tous les quatre ans a lieu un Congrès international des mathématiciens. Lors de ces congrès, une commission internationale attribue des récompenses, les Médailles Fields, à des mathématiciens âgés de moins de 40 ans pour des travaux jugés exceptionnels. Une médaille Fields est un peu l’équivalent d’un Prix Nobel. La petite histoire dit que Nobel avait une femme jeune et jolie qui était amoureuse d’un mathématicien, et que c’est pour cela qu’il n’y a pas de Prix Nobel en mathématiques ! C’est justement pour compenser cette absence de prix Nobel que le mathématicien canadien John Fields proposa, en 1924, de créer une récompense spécifique.

Depuis 1936, 42 médailles Fields ont été décernées. En voici la répartition par nationalité : États-Unis (11), France (7), Grande-Bretagne (6), URSS et Russie (5), Japon (3), autres pays (10). La France a obtenu à ce jour sept médailles (Laurent Schwartz en 1950, Jean-Pierre Serre en 1954, René Thom en 1958, Alexander Grothendieck en 1966, Alain Connes en 1982, Pierre-Louis Lions et Jean-Christophe Yoccoz en 1994) et se situe au deuxième rang mondial après les États-Unis. À ces sept médailles, on peut en ajouter trois autres qui ont été obtenues par des étrangers travaillant en France : Pierre Deligne (belge) en 1978, Jean Bourgain (belge) en 1994 et Maxime Kontsevich (russe) en 1998. Tout cela témoigne de la vitalité de la recherche française.

En France, il y a trois catégories principales de mathématiciens :

1) Les enseignants-chercheurs des universités et des grandes écoles, professeurs et maîtres de conférences : ils sont environ 2 800.

2) Les chercheurs à temps plein du CNRS et des autres organismes publics de recherche, au nombre de 350.

3) Les mathématiciens travaillant dans des administrations (INSEE, Météo, etc.) ou dans des entreprises (industrielles, financières ou de service) : leur nombre est plus difficile à évaluer, peut-être quelques centaines ?

Toujours en France, la part des mathématiques dans le financement public de la recherche est passée de 4 % en 1986 à 6 % en 1996, ce qui traduit bien l’importance croissante de cette discipline.

*Pour aller plus loin*

- sur la classification internationale des spécialités mathématiques :

<http://math-doc.ujf-grenoble.fr/MSC1991/msc91.html>

- sur les médailles Fields :

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/MedaillesF.html>

- sur le Congrès international des mathématiciens :

<http://www.icm2002.org.cn/>

**b) Le travail des mathématiciens**

Que font les mathématiciens ? Comme on l’a vu plus haut, leur travail est de résoudre des problèmes issus de sources variées, de découvrir des résultats nouveaux et de démontrer des théorèmes. Contrairement à ce qui se passe dans d’autres sciences, ce travail se fait le plus souvent sans matériel de laboratoire, avec seulement du papier et un crayon, parfois avec un ordinateur. Une grande partie du temps d’un mathématicien est consacrée à retourner dans tous les sens les problèmes auxquels il est confronté, soit dans sa tête de façon solitaire, soit à travers des discussions avec ses collègues (de plus en plus fréquemment via le courrier électronique). Lorsque ce long travail de réflexion a permis de dégager des résultats qui semblent vrais et intéressants, il reste à en rédiger des démonstrations précises et complètes, et à mettre le tout sous une forme cohérente en vue d’une éventuelle publication.

On constate dans l’histoire des mathématiques une alternance de périodes d’expansion et de périodes de consolidation, ce qui entraîne de légères variantes dans l’activité mathématique. Dans les phases d’expansion, les mathématiciens avancent à grands pas dans toutes les directions, accumulant de nombreux résultats nouveaux sans trop se préoccuper de rigueur. C’est, de manière typique, le cas du dix-huitième siècle, avec le développement rapide des applications du calcul infinitésimal sans que ce dernier repose sur des bases solides acceptées de tous. Au contraire, dans les phases de consolidation, on se consacre plutôt à mettre de l’ordre dans la masse des résultats accumulés, à réorganiser les connaissances au sein de théories abstraites et à développer des méthodes. Ces phases sont caractérisées par l’écriture de grands traités de synthèse, comme les *Éléments* d’Euclide dans l’Antiquité ou les *Éléments de mathématique* de Nicolas Bourbaki dans la seconde moitié du vingtième siècle. Pour se limiter à l’époque récente, on peut dire qu’il y a eu consolidation entre 1955 et 1975, et expansion depuis.

Mais d’où viennent ces problèmes qui occupent tant les mathématiciens ? Les moteurs de la recherche en mathématiques sont au nombre de trois. Il y a d’abord la curiosité : les mathématiciens cherchent souvent dans des directions décidées par eux-mêmes, sans souci immédiat d’application, même s’il est fréquent que des recherches " gratuites " aient plus tard des applications inattendues. Ensuite, il y a la nécessité interne aux mathématiques : la résolution d’un problème fait surgir de nouvelles questions, et ainsi de suite. Enfin, il y a bien sûr une source externe : les besoins de la science et de la technologie, notamment de la physique théorique (relativité générale, mécanique quantique). On se situe là aux frontières des mathématiques, dans leur interaction avec les sciences de l’ingénieur, la physique théorique et, plus récemment, l’informatique.

**4. Les mathématiques ne sont pas pures**

De nombreux jeunes gens choisissent de faire de la recherche en mathématiques parce qu’ils y voient un paradis intellectuel où toute l’activité consiste à inventer, à organiser et à échanger des idées dont la valeur est décidée par des critères purement internes. Le mathématicien n’espère ni pouvoir, ni richesse, ni célébrité publique. Mais il peut espérer jouir d’une liberté rarement disponible ailleurs. C’est ce qui distingue les mathématiciens des autres scientifiques et des ingénieurs, prisonniers de leurs laboratoires. Bref, de nombreux mathématiciens sont des idéalistes.

Les plus idéalistes d’entre eux ont en général une aversion marquée pour les mathématiques appliquées, qu’ils opposent aux mathématiques pures, seules dignes d’intérêt. Le débat n’est pas nouveau. Déjà, au dix-neuvième siècle, Jacobi s’opposait à Fourier en ces termes : " Il est vrai que M. Fourier avait l’opinion que le but principal des mathématiques était l’utilité publique et l’explication des phénomènes naturels : mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c’est l’honneur de l’esprit humain, et que sous ce titre, une question de théorie des nombres vaut autant qu’une question de système du monde. "

Cependant, les mathématiques " pour l’honneur de l’esprit humain " ont, qu’on le veuille ou non, d’innombrables applications scientifiques et techniques, immédiatement ou à terme (on l’a vu plus haut, avec l’étude des coniques qui a conduit tout droit aux satellites, aux vols spatiaux et aux missiles balistiques ; de même avec l’arithmétique la plus pure qui est à l’origine des techniques actuelles de codage et de cryptage, en particulier dans le domaine militaire). À ce propos, un philosophe a justement parlé de " l’efficacité déraisonnable des mathématiques ".

Comme on le voit, les applications sont souvent militaires. Ce n’est pas nouveau : les mathématiciens ont toujours travaillé au service de l’artillerie ou des fortifications (Archimède, Euler, Legendre, Monge, etc.). Depuis la Seconde Guerre mondiale, le développement des mathématiques appliquées aux États-Unis a pris son essor grâce au gigantesque effort de guerre et a été entretenu ensuite par les nécessités de la Guerre froide. La tradition s’est perpétuée : actuellement, aux États-Unis, on estime que 90 % du financement des recherches mathématiques provient, directement ou indirectement, de l’armée. L’armée laisse une liberté totale aux chercheurs. Elle dispose elle-même d’un organisme pour dégager après coup d’éventuelles applications militaires aux nouvelles découvertes. Quelqu’un a dit : " la Première Guerre mondiale a été celle des chimistes, la Seconde celle des physiciens, et la Troisième sera celle des mathématiciens ". On l’a bien vu en Yougoslavie : les militaires possèdent désormais plus d’ordinateurs que d’armes proprement dites, les systèmes de surveillance par satellite ou de guidage des bombes sont directement issus des recherches innocentes des géodésiens pour mesurer la surface de la Terre à 20 cm près, la cryptographie joue un rôle essentiel, etc.

En fin de compte, les mathématiques ne sont jamais pures. Elles sont intimement liées aux activités humaines, pour le meilleur et pour le pire.

*Pour aller plus loin*

- sur la science et la guerre :

<http://www.larecherche.fr/special/web/webhs7p1.html>

- sur les mathématiciens dans l’industrie :

<http://www.siam.org/mii/node1.html>

Je terminerai par une citation tirée d’un ouvrage récent : " les mathématiques n’ont pas joué de rôle important dans les sciences du vingtième siècle ". Qui a bien pu dire cela ? Eh bien, c’est Claude Allègre, notre ministre de l’éducation, dans son livre *La défaite de Platon*. Au terme de mon exposé, j’espère vous avoir convaincu que de telles affirmations frisent le ridicule.