Fiche n°2 sur la projection de vecteurs

I. Eléments de cours à connaître

I.1 Définition du produit scalaire
I.2 Conséquences / propriétés
I.3 Application : formule d'Al Kashi
I.4 Projection d'un vecteur
I.5 Expression analytique
I.6 Une propriété utile pour les exercices

II. Exercices d'applications

III. Corrections des exercices

I. Eléments de cours à connaître

I.1 Définition du produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ est un **scalaire** et est noté $\vec{A}.\vec{B}$.

Il est défini de la manière suivante :

$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos(\alpha)$, avec $\alpha = (\vec{A}, \vec{B})$ angle formé par les deux vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ de normes respectives $\|\vec{A}\|$ et $\|\vec{B}\|$.

I.2 Conséquences/propriétés

- $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires ou orthogonaux est nul
- La norme des deux vecteurs étant fixée, le produit scalaire de deux vecteurs est extrémal lorsque les deux vecteurs sont colinéaires
- $(\vec{A}+\vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{C}$
- $\vec{A}.\vec{A} = \|\vec{A}\|.\|\vec{A}\| = \|\vec{A}\|^2$.

La norme d'un vecteur est la racine de son carré scalaire : $\sqrt{\vec{A}.\vec{A}} = \|\vec{A}\|$.

I.3 Application : formule d'Al-Kashi

Soients deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

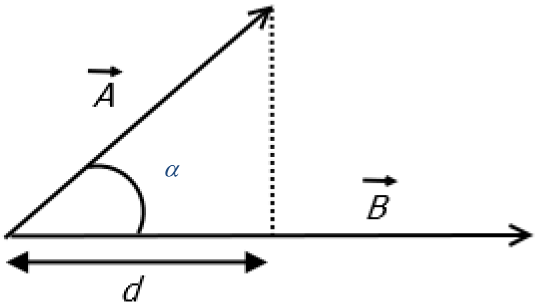
$$(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B}) = \|\vec{A}+\vec{B}\|^2 = \vec{A}.\vec{A} + \vec{B}.\vec{B} + 2\vec{A}.\vec{B}$$

On en déduit le théorème d'Al Kashi : $\|\vec{A}+\vec{B}\| = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + 2\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos(\vec{A}, \vec{B})}$

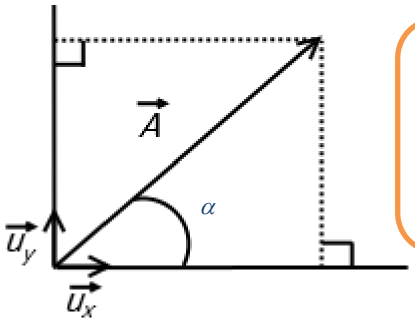
Cette formule est très utile pour calculer certaines longueurs de segments mais il est inutile de la retenir par cœur, le plus simple étant de la retrouver, comme indiqué ci-dessus.

I.4 Projection d'un vecteur

$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos(\alpha) = d.\|\vec{B}\|$ avec ***d* la projection du vecteur** $\vec{A}$ **sur** $\vec{B}$**.**



Application : trouver les composantes d'un vecteur dans une base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$



$$\vec{A} = A_x\vec{u_x} + A_y\vec{u_y}$$

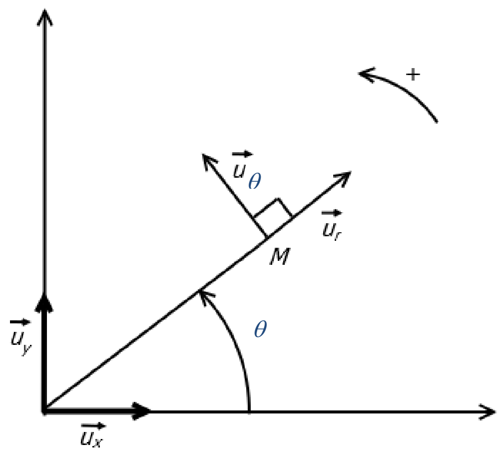
avec $A_x = \vec{A}.\vec{u_x} = \|\vec{A}\|\cos(\alpha)$ et $A_y = \vec{A}.\vec{u_y} = \|\vec{A}\|\sin(\alpha)$

Voir aussi :
https://www.youtube.com/watch?v=5Cfdf1OAxs0

<u>Exercice d'application</u>

Soient deux bases orthonormées $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ du plan, définies sur la figure ci-contre.

Exprimer les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ puis les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.



Correction :

$\vec{u_r} = cos\theta\vec{u_x} + sin\theta\vec{u_y}$
$\vec{u_\theta} = -sin\theta\vec{u_x} + cos\theta\vec{u_y}$
$\vec{u_x} = cos\theta\vec{u_r} - sin\theta\vec{u_\theta}$
$\vec{u_u} = sin\theta\vec{u_r} + cos\theta\vec{u_\theta}$

I.5 Expression analytique

Soit $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ une **base orthonormée directe** dans un espace vectoriel à trois dimensions.

$\vec{A}, \vec{B}$ sont deux vecteurs de coordonnées cartésiennes respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans la base précédente.

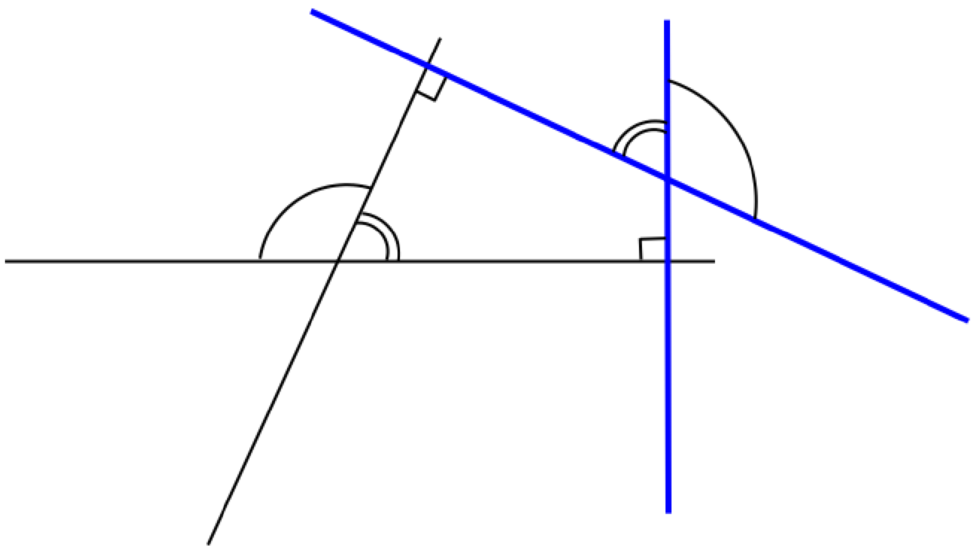
Il découle de la définition du produit scalaire : $\boxed{\vec{A}.\vec{B} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B}$

La norme d'un vecteur est alors donnée par :

$$\boxed{\|\vec{A}\| = \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2 + z_A{}^2}}$$

I.6 Propriété utile pour les exercices

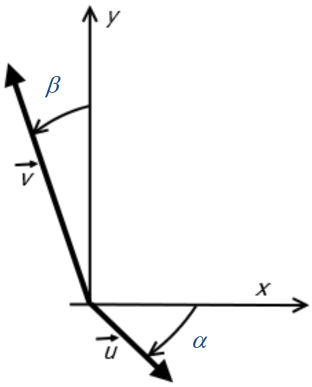
Soient (D1) et (D2) deux droites sécantes. Soient deux autres droites (D'1) et (D'2) telles que (D'1) est perpendiculaire à (D1) et (D'2) est perpendiculaires à (D2). Les angles formés par les droites (D'1) et (D'2) sont égaux à ceux formés par les droites (D1) et (D2).



II. Exercices d'application

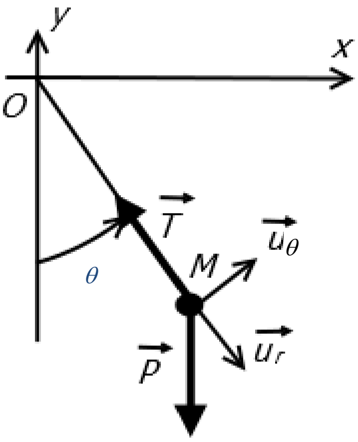
Dans tous les exercices, on prend comme sens positif des angles le sens trigonométrique.

Exercice 1 : Projections et produit scalaire



On considère une base orthonormée du plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Soient un vecteur $\vec{u}$ de norme u faisant un angle α avec le vecteur $\vec{u}_x$ et un vecteur $\vec{v}$ de norme v et faisant un angle β avec le vecteur $\vec{u}_y$. Donner les projections des deux vecteurs précédents dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Déterminer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ de deux manières différentes.

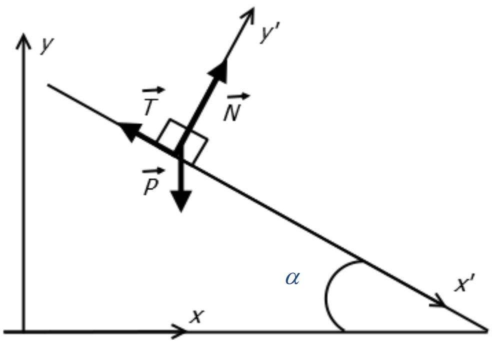
Exercice n°2 : Pendule pesant



On considère un pendule pesant constitué d'un fil tendu sans masse et d'un point matériel M de masse m. L'axe (Oy) est l'axe vertical. Les forces s'exerçant sur le point M sont le poids $\vec{P}$ de norme P et la tension $\vec{T}$ du fil de norme T. La position du point M est paramétrée par l'angle θ (voir figure ci-contre).
Déterminer les composantes de ces deux forces dans la base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ définie sur le dessin.

Exercice 3 : Palet sur un plan incliné

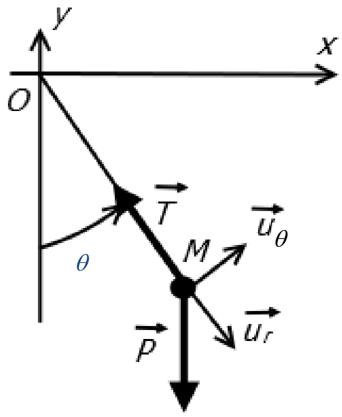
On considère un palet sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Ce palet subit trois forces : son poids caractérisé par le vecteur $\vec{P}$ de norme P et de la part du plan incliné la réaction normale $\vec{N}$ de norme N et la réaction tangentielle $\vec{T}$ de norme T (frottements solide). On considère par ailleurs deux bases orthonormées du plan : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$ (voir dessin)

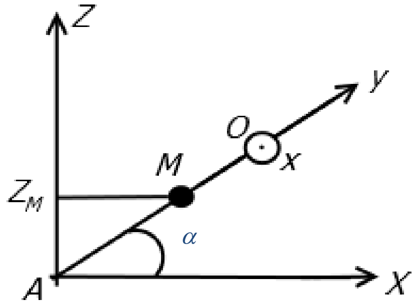


1) Exprimer les trois forces considérées dans les deux bases différentes.
2) Exprimer la résultante des forces $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$ dans la base $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$.
3) Déterminer la norme du vecteur $\vec{P} - \vec{T}$.
4) Soit un vecteur $\vec{v}$ de norme v et faisant un angle β avec le vecteur $\vec{u}_{x'}$. Exprimer $\vec{P}.\vec{v}$ en fonction de P, v, β et α.

Exercice 4 : Pendule pesant sur un plan incliné

On considère le pendule pesant de l'exercice 2 sur un plan incliné (Oxy) d'un angle α par rapport à l'horizontale (AX). La droite (OA) est sur la ligne de plus grande pente et on donne $OA=L$. Déterminer la projection Z_M du vecteur $\overrightarrow{AM}$ suivant l'axe vertical (AZ).





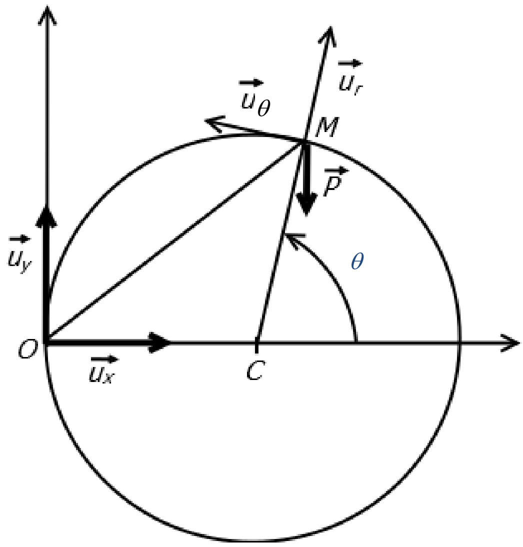
Vérifier votre résultat en considérant des cas limites ($\alpha=0$ ou $\alpha=\pi/2$).

Exercice 5 : Point matériel sur un cerceau

On considère un anneau assimilé à un point matériel M de masse m se déplaçant sur un cerceau de rayon a de centre C. On repère la position du point M par l'angle orienté θ et la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est orthonormée directe. Le point M est soumis en particulier à son poids caractérisé par le vecteur $\vec{P}$ de norme P.

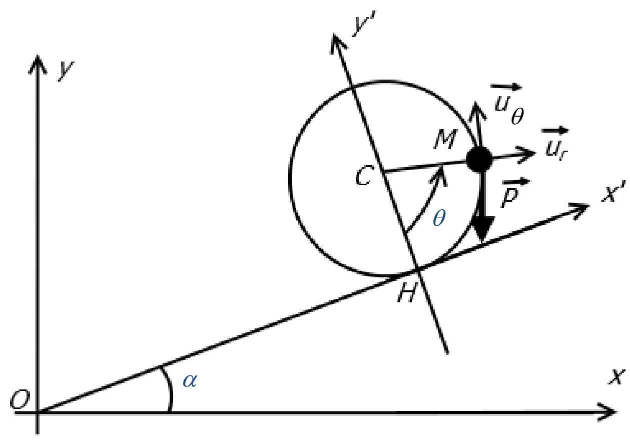
Le vecteur $\vec{u}_y$ est suivant la direction verticale.

1) Exprimer le poids $\vec{P}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ définie sur le schéma ci-contre (on pourra utiliser : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$).
3) En déduire la longueur OM et commenter.



Exercice 6 : Cerceau lesté sur un plan incliné

On considère un cerceau circulaire de rayon R, de centre C se déplaçant sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Ce cerceau est lesté par une masse supposée ponctuelle M de masse m. On repère la position de cette masse par l'angle θ. On considère la base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ comme définie sur le dessin, dépendant de la position de M. L'axe (Oy) est vertical. Le point M est soumis en particulier à son poids caractérisé par le vecteur $\vec{P}$ de norme P.



1) Exprimer le poids $\vec{P}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

2) Déterminer la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe vertical (*Oy*) en fonction de α, θ, *R* et la distance *OH*.

3) On admet que la vitesse du point *M* dans le référentiel lié au plan incliné s'exprime par la relation suivante $\vec{V}(M) = V_C \vec{u}_{x'} + R\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$. Déterminer les composantes de cette vitesse dans la base $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$.

III. Corrections des exercices

Exercice 1

$$\begin{cases} \vec{u} = (\cos\alpha\, \vec{u_x} + \sin\alpha\, \vec{u_y})\, u \\ \vec{v} = (-\sin\beta\, \vec{u_x} + \cos\beta\, \vec{u_y})\, v \end{cases}$$

($\alpha < 0$ sur le dessin)

$\vec{u}.\vec{v}$?

- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = uv\sin(\alpha-\beta)$

ou

- $\vec{u}.\vec{v} = (-\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\, uv$

$= uv\sin(\alpha-\beta)$ même résultat bien sûr

Exercice 2

$$\begin{cases} \vec{P} = P(\cos\theta\, \vec{u_r} - \sin\theta\, \vec{u_\theta}) \\ \vec{T} = -T\, \vec{u_r} \end{cases}$$

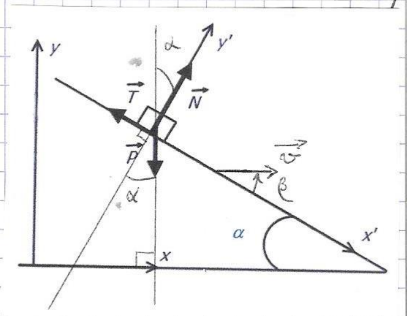
($\theta > 0$ sur le dessin)

Exercice 3

1) dans $(\vec{u_{x'}}, \vec{u_{y'}}, \vec{u_{z'}})$

$$\begin{cases} \vec{N} = N\, \vec{u_{y'}} \\ \vec{T} = -T\, \vec{u_{x'}} \\ \vec{P} = -P\cos\alpha\, \vec{u_{y'}} + P\sin\alpha\, \vec{u_{x'}} \end{cases}$$

(en utilisant la propriété I.6)



dans $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$

$$\begin{cases} \vec{N} = N\cos\alpha\, \vec{u_y} + N\sin\alpha\, \vec{u_x} \\ \vec{T} = -T\cos\alpha\, \vec{u_x} + T\sin\alpha\, \vec{u_y} \\ \vec{P} = -P\, \vec{u_y} \end{cases}$$

2) $\vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$ $\begin{vmatrix} -T + P\sin\alpha \\ N - P\cos\alpha \end{vmatrix}$ $(\vec{u_{x'}}, \vec{u_{y'}})$

3) $\vec{P} - \vec{T}$ $\begin{vmatrix} P\sin\alpha + T \\ -P\cos\alpha \end{vmatrix}$ $(\vec{u_{x'}}, \vec{u_{y'}})$

$\Rightarrow \|\vec{P} - \vec{T}\| = \sqrt{(T + P\sin\alpha)^2 + P^2\cos^2\alpha}$

4) $\vec{v} = v(\cos\beta\, \vec{u_{x'}} + \sin\beta\, \vec{u_{y'}})$

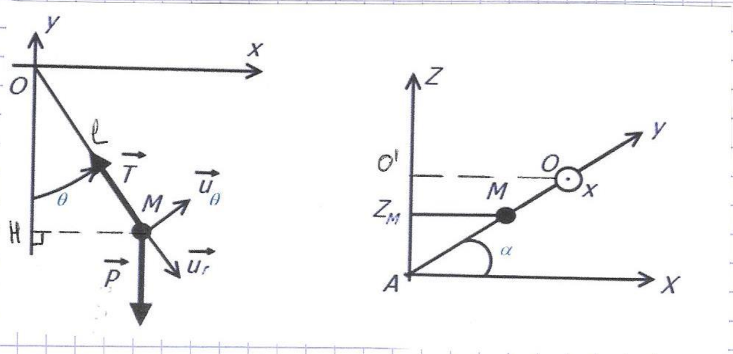
$\Rightarrow \vec{P}.\vec{v} = Pv[\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta]$

$\vec{P}.\vec{v} = Pv\sin(\alpha - \beta)$

ou $\vec{P}.\vec{v} = Pv\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha\right)$

$= Pv\sin(\alpha - \beta)$

Exercice 4



$OM = -\vec{u_y}\cdot\vec{OM} = \ell\cos\theta$

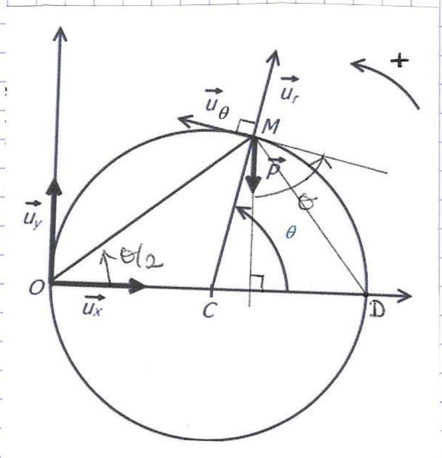
$AO' = \vec{AO}\cdot\vec{u_Z} = L\sin\alpha$

$z_M = AO' - OH\sin\alpha$

$$z_M = L\sin\alpha - \ell\cos\theta\sin\alpha$$

cas limites : $\begin{cases} \alpha = 0 & z_M = 0 \quad \text{ok} \\ \alpha = \pi/2 & z_M = L - \ell\cos\theta \quad \text{ok} \end{cases}$

Exercice 5



1°) En utilisant la propriété I.6 :

$$\vec{P} = P\left(-\sin\theta\,\vec{u_r} - \cos\theta\,\vec{u_\theta}\right)$$

2) $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = a\,\vec{u_x} + a\,\vec{u_r}$

$\vec{OM} = a\left(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right) + a\,\vec{u_r}$

$\Longrightarrow \vec{OM} = a(1+\cos\theta)\,\vec{u_r} - a\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

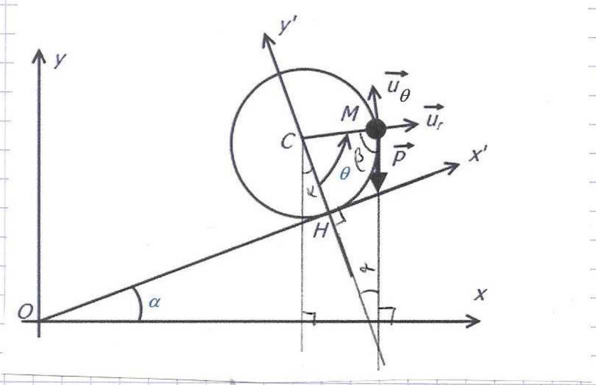
3) $OM^2 = a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta = a^2\,2\,(1+\cos\theta)$

$\Longleftrightarrow OM^2 = a^2\,4\cos^2\theta/2$

$\Longrightarrow OM = 2a\cos\theta/2$

Ce résultat aurait pu être déterminé dans le triangle rectangle OMD en M sachant que $OD = 2a$ et $(\widehat{COM}) = \theta/2$

Exercice 6



1°) D'après I.6

$\beta = \pi - \theta - \alpha$

D'où $\vec{P} = P\left[\cos(\theta+\alpha)\vec{u_r} - \sin(\alpha+\theta)\vec{u_\theta}\right]$

2) $\vec{O\Omega} \cdot \vec{u_y} = (\vec{OH} + \vec{HC} + \vec{C\Omega}) \cdot \vec{u_y}$

$= OH \sin\alpha + R\cos\alpha - R\cos(\alpha+\theta)$

3) $\vec{v}(\Omega) = V_c \vec{u_{x'}} + R\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta} = V_c \vec{u_{x'}} + \dfrac{Rd\theta}{dt}\left(\sin\theta \vec{u_{y'}} + \cos\theta \vec{u_{x'}}\right)$

$\vec{v}(\Omega) = \vec{u_{x'}}\left(V_c + R\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta\right) + \vec{u_{y'}} \sin\theta \, R\dfrac{d\theta}{dt}$