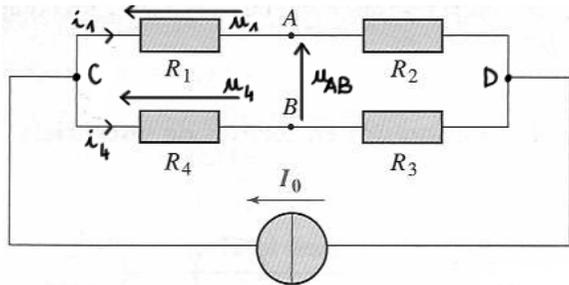


ELECTROCINÉTIQUE

I. Pont de Wheastone



1. On introduit les courants i_1 et i_4 et les nœuds C et D comme indiqué ci-dessus. La loi des nœuds s'écrit $I_0 = i_1 + i_4$. Après addition des résistances en série, la loi du pont diviseur de courant conduit à

$$i_1 = \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_0 \quad \text{et} \quad i_4 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_0.$$

Par additivité des tension on a $u_{AB} = u_4 - u_1 = R_4 i_4 - R_1 i_1$. On en déduit

$$u_{AB} = \frac{R_4(R_1 + R_2) - R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_0 \quad \text{ou} \quad u_{AB} = \frac{R_4 R_2 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_0. \quad (1)$$

2. Le pont est équilibré si et seulement si $R_4 R_2 = R_1 R_3$.

3. L'équilibre du pont s'écrit

$$Rr = X(\theta_0)r \Leftrightarrow R = X_0(1 + a\theta_0) = 52 \Omega.$$

D'après l'Eq. (1), l'élévation de température $\Delta\theta$ conduit à une tension

$$u_{AB} = \frac{r(R - X(\theta_0 + \Delta\theta))}{2r + R + X(\theta_0 + \Delta\theta)} I_0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{AB} = -\frac{rX_0a\Delta\theta}{2r + 2R + X_0a\Delta\theta} I_0 = -4,8 \times 10^{-7} \text{ V}.$$

4. En présence de la source e_0 , le calcul des courants en 1. n'est plus valable. Les courants i_1 et i_4 sont remplacés par i'_1 et $i'_4 = I_0 - i'_1$. Le voltmètre étant idéal, il peut être remplacé par un interrupteur ouvert. La loi des mailles dans la maille élémentaire supérieure s'écrit alors

$$-X i'_1 + e_0 - r i'_1 + (R + r)(I_0 - i'_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i'_1 = \frac{e_0 + (R + r)I_0}{2r + R + X}.$$

Or $u_{AB} = R(I_0 - i'_1) - X i'_1 + e_0$ d'où

$$u_{AB} = R I_0 + e_0 - \frac{(R + X)(e_0 + (R + r)I_0)}{2r + R + X} \quad \text{ou} \quad u_{AB} = \frac{2r e_0 + r(R - X)I_0}{2r + R + X} = \frac{2r e_0 - r X_0 a \Delta\theta I_0}{2r + 2R + X_0 a \Delta\theta}.$$

On reconnait que le second terme est la tension obtenue en 3., en l'absence de e_0 . L'apparition de e_0 ajoute donc une tension supplémentaire

$$\Delta u_{AB} = \frac{2r e_0}{2r + 2R + X_0 a \Delta\theta} \underset{a\Delta\theta \ll 1}{\approx} \frac{r e_0}{r + R}.$$

On veut que cette tension parasite soit petite devant celle liée à $\Delta\theta$ évaluée en 3. :

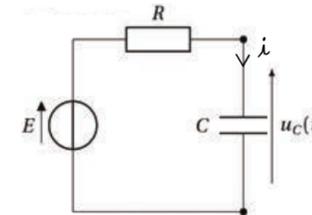
$$\frac{r|e_0|}{r + R} \ll |u_{AB}| \quad \Leftrightarrow \quad |e_0| \ll \left(1 + \frac{R}{r}\right) |u_{AB}| \approx \left(1 + \frac{52}{1000}\right) \times 4,8 \times 10^{-7} = 4,8 \times 10^{-7} \text{ V}.$$

II. Supercondensateurs

II.1. Mesure d'une capacité de condensateur

1. On introduit le courant i ci-contre. La loi des mailles s'écrit $E = Ri + u_c$ avec $i = C \frac{du_c}{dt}$, ce qui conduit à

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = E \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$



2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre constant. La solution générale s'écrit $u_c(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + E$. La valeur de la constante λ est obtenue par les conditions initiales. **Par continuité de la tension aux bornes du condensateur**, qui est initialement déchargé, on a

$$u_c(0) = \lambda + E = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -E \quad \text{et} \quad u_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

La solution particulière $E = \lim_{t \rightarrow \infty} u_c(t)$ est le **régime permanent**, qu'on identifie sur le graphe par l'asymptote à $E \approx 5,1 \pm 0,1 \text{ V}$.

On peut déterminer τ en notant que $u_c(t = \tau) = (1 - e^{-1})E \approx 0,63E$, c'est-à-dire $u_c(\tau) \approx 3,2 \text{ V}$. Par détermination graphique, on trouve que cette valeur est atteinte à l'instant $\tau = 1,0 \pm 0,1 \text{ ms}$.

3. On déduit $C = \frac{\tau}{R} = 1,0 \mu\text{F}$. τ et R étant respectivement connus à 10% et 1% près, on peut considérer que R est connu de façon certaine et C connu à 10% près¹. D'où l'incertitude sur C : $u(C) \approx 0,1 \mu\text{F}$.

II.2. Supercondensateurs

4. On ne connaît pas a priori la tension aux bornes de la source de courant, donc la loi des mailles n'est pas ici utile dans un premier temps.

Notons u_{c0} la tension aux bornes de la capacité pure, on a alors

$$\forall t : u_c = R_0 i + u_{c0} \quad \text{avec} \quad i = C_0 \frac{du_{c0}}{dt}.$$

Pour $t \in]0, \Delta t[$, on peut intégrer cette dernière relation car $i = I = \text{constante}$, ce qui donne :

$$\forall t \in]0, \Delta t[: u_{c0}(t) = \frac{I}{C_0} t + u_{c0}(0^+).$$

Avant la fermeture du circuit, le courant est nul et le condensateur chargé par une tension U_0 , donc

$$\forall t < 0, u_c = 0 + u_{c0} = U_0.$$

On en déduit $u_c(0^-) = u_{c0}(0^-) = U_0$, et par continuité de la tension aux bornes d'une capacité, on obtient $u_{c0}(0^+) = U_0$, d'où finalement

$$\forall t \in]0, \Delta t[: u_{c0}(t) = \frac{I}{C_0} t + U_0 \quad \text{et} \quad u_c(t) = R_0 I + \frac{I}{C_0} t + U_0.$$

1. La relation de composition des incertitudes relatives s'écrirait ici :

$$\frac{u(C)}{C} = \sqrt{\left(\frac{u(\tau)}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2} = \sqrt{0,01 + 0,0001} \approx 0,1.$$

Après la coupure du courant, on a de nouveau

$$\forall t > \Delta t, u_c = 0 + u_{c0} \quad \text{avec} \quad i = C_0 \frac{du_{c0}}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad u_c = u_{c0} = \text{constante.}$$

Par continuité de u_{c0} on trouve alors que $u_c(\Delta t^+) = u_{c0}(\Delta t^+) = u_{c0}(\Delta t^-)$, d'où $u_c(\Delta t^+) = \frac{I\Delta t}{C_0} + U_0$.

5. D'après l'étude précédente, on voit que les discontinuités de la courbe sont

$$u_c(0^+) - u_c(0^-) = u_c(\Delta t^-) - u_c(\Delta t^+) = R_0 I.$$

Graphiquement cette discontinuité est évaluée à $\Delta u_c = 0,11 \text{ V}$, ce qui donne $R_0 = \frac{\Delta u_c}{I} = 1,1 \text{ m}\Omega$ (très faible).

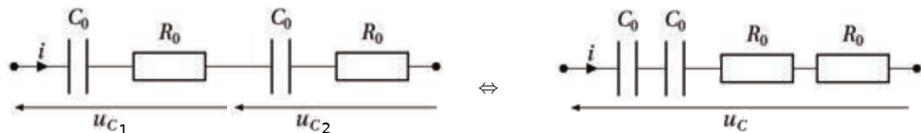
La pente $p = \frac{I}{C_0}$ de la phase de charge est mesurée à

$$p = \frac{2,02 - 1,66}{10} \approx 0,036 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{d'où} \quad C_0 = \frac{I}{p} = 2,8 \times 10^3 \text{ F},$$

ce qui est très gros (et justifie le terme de *supercondensateur*).

6. On note respectivement u_{c1} et u_{c2} les tensions aux bornes de chaque supercondensateur, et $u_{c0,1}$ et $u_{c0,2}$ celles aux bornes des capacités associées (cf ci-dessous, à gauche). La tension totale vérifie

$$u_c = u_{c1} + u_{c2} = u_{c0,1} + R_0 i + u_{c0,2} + R_0 i = u_{c0,1} + u_{c0,2} + 2R_0 i.$$



La deuxième égalité montre que le dipôle est équivalent à celui ci-dessus à droite, où l'on a permuté les éléments. Les résistances s'additionnent. Les inverses des capacités s'additionnent, car deux capacités C_1 et C_2 en série soumises à une tension globale u conduisent par additivité des tensions à

$$\frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2} = \frac{du}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad i = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} \frac{du}{dt}.$$

On en déduit que le dipôle est équivalent à **une capacité** $C_s = \frac{C_0}{2}$ **en série avec une résistance**

$$R_s = 2R_0.$$

Le raisonnement suivi serait identique avec n supercondensateurs en série, ce qui donnerait $C_s = \frac{C_0}{n}$ et

$$R_s = nR_0.$$

7. a) Avec les mêmes notations que précédemment, le supercondensateur seul (ci-dessous à gauche) vérifie l'équation tension-courant suivante

$$\forall t, u_c = u_{c0} + R_0 i \quad \text{avec} \quad i = C_0 \frac{du_{c0}}{dt} \quad \text{donc} \quad \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C_0} + R_0 \frac{di}{dt}.$$

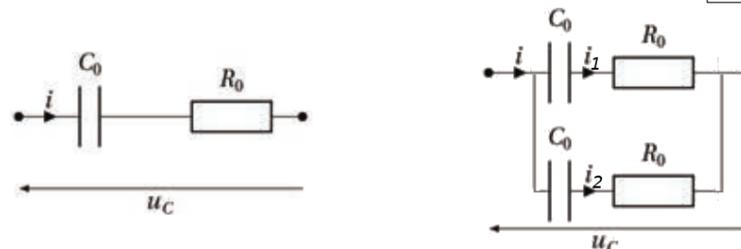
b) Pour le dipôle ci-dessous à droite, on peut donc écrire

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i_1}{C_0} + R_0 \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{du_c}{dt} = \frac{i_2}{C_0} + R_0 \frac{di_2}{dt} \quad \text{avec} \quad i = i_1 + i_2.$$

En additionnant ces deux relations, on obtient donc

$$2 \frac{du_c}{dt} = \frac{i_1 + i_2}{C_0} + R_0 \frac{di_1 + i_2}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{2C_0} + \frac{R_0}{2} \frac{di}{dt}$$

Par identification avec l'équation différentielle du simple supercondensateur, on en déduit que ce dipôle est équivalent à la mise en série d'une capacité $C_d = 2C_0$ et d'une résistance $R_d = \frac{R_0}{2}$.



c) Démontrons par récurrence que la mise en dérivation de m supercondensateurs donnerait la même chose avec $C_d = mC_0$ et $R_d = \frac{R_0}{m}$. En supposant cette proposition vraie, le fait d'ajouter un $m + 1$ -ième supercondensateur conduirait à

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i_1}{mC_0} + \frac{R_0}{m} \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{du_c}{dt} = \frac{i_2}{C_0} + R_0 \frac{di_2}{dt} \quad \text{avec} \quad i = i_1 + i_2 \quad \text{d'où}$$

$$(m + 1) \frac{du_c}{dt} = \frac{i_1 + i_2}{C_0} + R_0 \frac{di_1 + i_2}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{(m + 1)C_0} + \frac{R_0}{m + 1} \frac{di}{dt}.$$

La proposition était donc vraie.

8. Il faut d'abord associer n supercondensateurs (C_0, R_0) en série, ce qui donne m supercondensateurs (C_s, R_s) en dérivation, d'où

$$C_{n,m} = \frac{m}{n} C_0 \quad \text{et} \quad R_{n,m} = \frac{n}{m} R_0.$$