Corrigé de l'exercice 1 :

Ces questions sont en fait des cas particuliers d'un résultat bien plus général :

si l'on construit sur les côtés du triangle rectangle ABC des figures S_1, S_2 et S_3 semblables, alors on a :

S_2 est semblable à S_1 dans le rapport $\frac{b}{c}$ donc $aire(S_2) = \frac{b^2}{c^2} \times aire(S_1)$

S_3 est semblable à S_1 dans le rapport $\frac{a}{c}$ donc $aire(S_3) = \frac{a^2}{c^2} \times aire(S1)$

$aire(S_2) + aire(S_3) = \frac{a^2+b^2}{c^2} \times aire(S_1) = aire(S_1)$ car $a^2 + b^2 = c^2$

Corrigé de l'exercice 2 :

1) a) On peut se servir de l'égalité $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

pour obtenir $a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3$

ce qui peut s'écrire $a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4ab(a^2+b^2) - 6(ab)^2$

(on est guidé vers cette forme en suivant la "symétrie" des expressions utilisées dans l'énoncé).

Sachant que $a + b = 1$ on obtient : $a^4 + b^4 = 1 - 4ab(a^2+b^2) - 6(ab)^2$ ce qui nous oblige à calculer $a^2 + b^2$ et ab

b) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1 - 2ab$ et il nous reste à calculer ab

c) le fait que l'on connaisse $a + b$ et $a^3 + b^3$, et que pour calculer $a^4 + b^4$ on soit passé par le calcul de $a^2 + b^2$ peut nous guider vers le calcul de $a^3 + b^3$ pour déterminer ab

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

donc $3 = 1 - 3ab$ puisque $a + b = 1$

donc $ab = -\frac{2}{3}$

d) si on met tout ça ensemble, on obtient : $a^4 + b^4 = 1 + \frac{8}{3}\left(1 + \frac{4}{3}\right) - 6 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 + \frac{8}{3} \times \frac{7}{3} - 6 \times \frac{4}{9}$

soit $a^4 + b^4 = \frac{41}{9}$

2) $(a^4 + b^4)(a^3 + b^3) = a^7 + b^7 + a^3b^4 + a^4b^3 = a^7 + b^7 + (ab)^3(a+b)$

donc $\frac{41}{9} \times 3 = a^7 + b^7 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3 \times 1$

ce qui donne $a^7 + b^7 = \frac{41}{3} + \frac{8}{27} = \frac{377}{27}$ soit $a^7 + b^7 = \frac{377}{27}$