Exercice 1

$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \ldots + a_1 X + a_0$
$P(10) = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \ldots + a_1 10 + a_0$ qui est l'écriture en base 10 d'un nombre entier, à condition que les a_i soient des chiffres, c'est à dire des nombres entiers entre 0 et 9
Mais c'est la cas ici car $P(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 9$ donc les a_i qui sont des entiers d'après (a) sont entre 0 et 9
$P(10) = 32103 = 3 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10 + 3$ ce qui donne $a_4 = 3$, $a_3 = 2$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_0 = 3$
Donc $P(X) = 3X^4 + 2X^3 + X^2 + 3$
On peut remarquer que la solution est unique parce que le polynôme est à coefficients entiers et parce qu'on donne la valeur de $P(10)$ comme étant un entier inférieur à 10. Par exemple si on cherche les polynômes qui vérifient $P(1) = 12$ et $P(10) = 32103$, on a une infinité de solutions.
De manière générale, un polynôme quelconque n'est pas déterminé par ses valeurs en deux points puisqu'il y a une infinité de courbes polynomiales passant par 2 points fixés (par exemple pour tout entier n, les courbes d'équations $y = x^n$ passent par $(0,0)$ et $(1,1)$ donc il existe une infinité de polynômes ($P(X) = X^n$) vérifiant $P(0) = 0$ et $P(1) = 1$) ; dans l'exercice proposé c'est parce qu'on impose que le polynôme soit à coefficients entiers et qu'on donne une valeur de $P(10)$ inférieure à 10 qu'on a l'unicité de la solution.

Exercice 2

Les points P, Q, R étant les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB], on montre facilement que les triangles BPR, PCQ, QAC et PQR ont pour aire $\frac{1}{4}$.
Donc : aire(DEF) = 1/4 - aire(DPR) - aire(EPQ) - aire(RPQ).
Évaluons l'aire de DPR
Notons G les point d'intersection de (RX) et (AC).
(RP) est parallèle à (CG) et X est le milieu de [PC] donc X est le milieu de [RG] ;
de plus CG = RP = 1/2 AC donc YG = 1/4 AC + 1/2 AC + 1/2 AC = 5/4 AC = 5/2 RP donc les triangles DPR et DYG sont semblables dans le rapport 2/5 et on en déduit que aire(DPR) = 4/25 aire(DYG).
Notons H le pied de la hauteur issue de D dans le triangle DYG et K le pied

de la hauteur issue de D dans le triangle DPR.
D'après ce qui précède DH = 5/2 DK donc DH = 5/2 (HK - DH) ce qui donne 7/2 DH = 5/2 HK soit DH = 5/7 HK.
Or HK est la distance entre les droites parallèles (RP) et (AC) donc HK = 1/2 $\times$ (hauteur issue de B dans ABC) et DH = 5/7 $\times$ 1/2 $\times$ (hauteur issue de B dans ABC)
On a vu que YG = 5/4 AC
Conclusion : aire(DYG) = 1/2 $\times$ YG $\times$ DH = 1/2 $\times$ 5/4 $\times$ AC $\times$ 5/7 $\times$ 1/2 $\times$ (hauteur issue de B dans ABC) d'où aire(DYG) = 25/56 $\times$ AC $\times$ 1/2 $\times$ (hauteur issue de B dans ABC) = 25/56 aire(ABC) = 25/56
D'où : aire(DPR) = 4/25 $\times$ 25/56 = 1/14
De même pour aire(EPQ) et aire(RPQ)
Donc : aire (DEF) = 1/4 - 3/14 = 1/28