TD : Outils mathématiques

Première partie Généralités 1

Tracé d'allures

Quelques fonctions Donner les allures des fonctions suivantes :

$h(x) = x.e \quad ^x$; $m(x) = \frac{1}{x} + x$; $n(x) = x + sinx$; $z(x) = z_0 sin^2\left(2\pi\frac{x}{L}\right)$; $y(x) = \frac{x}{x+x_0}$; $z(x) = z_0 e \quad ^{x/x_0} cos(kx)$;

$f(x) = x\sqrt{1 \quad x^2}$; $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$; $h_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$;
$h_3(x) = a(1 \quad cos(kx))$.

Dilatations Comparer les graphes de $sinx$, $ksinx$ et $sin(kx)$

Puissance débitée par une pile On peut montrer que la puissance débitée par une pile est de la forme : $P = E_0 i \; Ri^2$, avec $i > 0$.

1 - Tracer l'allure de cette puissance.

2 - Déterminer la valeur de l'intensité qui maximise cette puissance et exprimer en fonction de E_0 et R la valeur de la puissance maximale.

Mouvement d'un mobile Le mouvement d'un mobile de masse m se déplaçant sur un banc incliné d'un angle ⍰ par rapport à l'horizontale et soumise à l'action d'aimants placés en bout de banc est repéré par la donnée de x, la distance instantané entre les aimants et le mobile. On peut construire une énergie potentielle $E_P(x) = \frac{k}{x^3} + mgxsin\alpha$

1 - Tracer l'allure de l'énergie potentielle.

2 - Exprimer la position x_0 du minimum local de cette fonction.

Charge d'un capteur capacitif La plupart des surfaces tactiles utilisent des capteurs capacitifs. La tension aux bornes d'un tel capteur, soumis à un échelon de tension est de la la forme : $U = E(1 \; e^{t/⍰})$

1 - Tracer l'allure de la fonction.

2 - Déterminer la pente initiale de la fonction.

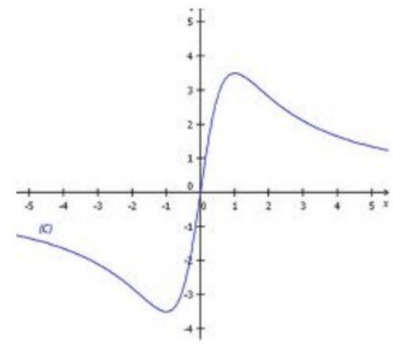
3 - Déterminer l'expression de la fonction $h(t)$, tangente à $U(t)$ en $t = 0$. Tracer cette tangente sur le même graphe. 4 - On appelle temps de montée t_m la durée nécessaire pour que le signal passe de 10% de sa valeur finale à 90% de sa valeur finale. Exprimer t_m en fonction de ⍰.

Impédance d'un dipôle On peut montrer qu'une bobine est caractérisée par une grandeur appelée impédance, dont le module est : $z = $ p$R^2 + !^2 L^2$.

1 - Tracer l'allure de ce module en fonction de ! pour ! variant de2 - Donner le domaine de0 à +1. ! dans lequel il est pertinent de considérer z comme une constante. Donner le domaine de ! dans lequel il est pertinent de considérer z comme une fonction linéaire.

2 Modèle de force non-linéaire

Soit un oscillateur non-linéaire caractérisé par la fonction suivante :



1. On souhaite modéliser cette courbe par la fonction $y(x) = \frac{kx}{x^2+x_0^2}$. Déterminer la position du maximum de cette fonction et la valeur de ce maximum. En utilisant la courbe, déterminer les valeurs numériques de k et x_0.
2. Déterminer le modèle affine de cette caractéristique au voisinage de $x = 3$.
3. Donner l'équation qui permet de savoir à quelle distance de ce point le modèle s'éloigne de la réalité de plus de 0,1.

3 Mise en forme d'un signal

On cherche à mettre en forme le signal suivant, dans la partie où il correspond à une exponentielle décroissante. Les réglages sont $0{,}1ms/div$ et $2V/div$.

1. A l'aide du graphe, déterminer l'amplitude et le temps typique de décroissance.
2. Ecrire le signal $u(t)$ en prenant garde à l'origine des temps. En déduire l'amplitude du signal au moment où l'alimentation - en rouge - reprend.
3. Avec quelle précision peut-on considérer que le signal est nul pour un temps correspondant à $4{,}5 carreaux$? Comparer cette précision avec la largeur du trait de mesure et conclure.

4 Interaction de Van der Waals

L'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules d'un gaz est donnée par : $E_p(r) = \frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}$ où r est la distance entre deux molécules, a et b deux nombres positifs.

1. Quelles sont les unités des constantes a et b? Tracer l'allure de cette énergie potentielle en fonction de r.
2. Calculer la valeur r_e de r qui correspond au minimum de l'énergie potentielle.

5 Détecteur de particules

Un détecteur de particules fournit un signal électrique de la forme : $V(t) = V_0 ln(1 + t/?)$ si $t < t_1$ et $V(t) = Ae^{t}$ si $t > t_1$.

1. Tracer l'allure de $V(t)$ sachant qu'elle est continue. A quoi correspondent respectivement ? et ? On précisera la valeur extrémale de $V(t)$. Déterminer A (on pourra noter V_1 un des intermédiaires de calcul).
2. Exprimer la dérivée temporelle de $V(t)$ en $t = 0$. Exprimer la dérivée seconde de $V(t)$ en $t = 0$. Existe-t-il un rapport entre ces deux grandeurs?
3. Exprimer le temps de montée t_m défini comme le temps mis par le signal pour atteindre la moitié de sa valeur extrémale.
4. Montrer que la dérivée première de $V(t)$ n'est pas continue en t_1. Exprimer sa discontinuité $\dot{V}(t_1^+) \quad \dot{V}(t_1)$.

6 Régimes transitoires

Soit une tension dans un circuit décrite par la fonction $u(t) = u_0 cos(!t)$. On note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

1 - Exprimer $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$, $\ddot{u}(t)$ et $\ddot{u}(t = 0)$.

Soit maintenant une tension décrite par la fonction $u(t) = Acos(!t) + Bsin(!t)$.

2 - Exprimer $u(t = 0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$. Sachant que $u(t = 0) = 0$ et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = e^{\frac{t}{\tau}}(Acos\,\Omega t + Bsin\,\Omega t)$.

3 - Exprimer $u(t = 0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$. Sachant que $u(t = 0) = 0$ et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = Ae^{\frac{t}{\tau_1}} + Be^{\frac{t}{\tau_2}}$.

4 - Exprimer $u(t = 0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$. Sachant que $u(t = 0) = 0$ et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

7 Lien fonction/dérivée

La vitesse d'un paquebot de masse m lors d'un freinage s'écrit : $v(t) = v_0 e^{t/?}$.

1 - Exprimer $\dot{v}$ en fonction du temps et des paramètres constants du problème. En déduire qu'il existe une relation simple entre $\dot{v}$, v et ?. En supposant que cette relation est issue du principe fondamental de la dynamique appliqué au paquebot, en déduire l'expression de la force de frottement subie par le paquebot.

Dans un autre modèle, la vitesse s'écrit : $v(t) = \frac{v_0}{1+\alpha t}$.

2 - Exprimer $\dot{v}$ en fonction de v_0, t et ?. En déduire qu'il existe une relation simple entre $\dot{v}$, ? et v. De même que précédemment, en déduire l'expression de la force de frottement cohérente avec une telle évolution.

L'altitude d'un lévitron est donnée par : $z(t) = z_0 cos(!t)$

3 - Exprimer $\dot{z}(t)$ puis $\ddot{z}(t)$. En déduire une relation simple entre $\ddot{z}$, z et $!$.

8 Fonctions composées

Lors du freinage d'un TGV de masse m, la vitesse $v(t)$ vérifie l'équation : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \quad \alpha v^3$

1 - Exprimer le terme de gauche en fonction de m, v et $\dot{v}$. En déduire une équation liant $\dot{v}$, ?, m et v.

Dans un circuit LC, la charge $q(t)$ du condensateur C vérifie l'équation : $LC\dot{q}^2 + q^2 = cste$.

2 - Dériver cette équation par rapport au temps.

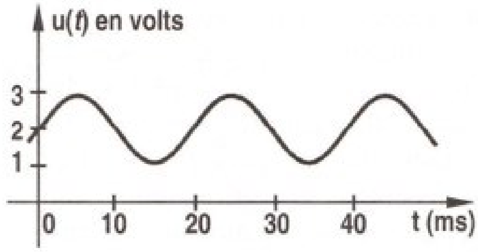
Soit z l'altitude d'une bille dans un saladier hémisphérique de rayon r_0. On peut montrer par le théorème de Pythagore que $z = p r_0^2 \; r^2$ 3 - Exprimer $\frac{dz}{dr}$.

On considère le cas où $r(t)$ varie : on définit $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$.

4 - Exprimer $\dot{z}$ et commenter géométriquement.

9 Fonctions sinusoïdales

Ecriture d'une fonction *Mise en forme* 1. Donner l'expression de la tension $u(t)$ dont le graphe est figuré ci-après. Déterminer sa valeur moyenne et la valeur efficace de sa composante alternative.

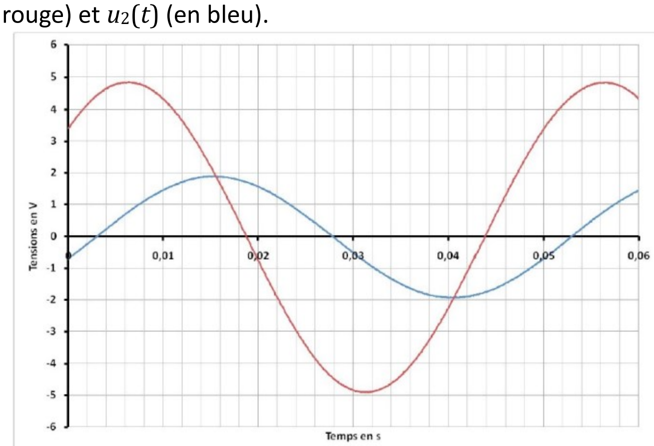


Problème inverse

Soit un signal sinusoïdal d'amplitude maximale 2 Volts, et de période 2 ms.

2. Tracer-le. Tracer sur le même schéma un signal sinusoïdal d'amplitude double et de fréquence double du précédent, initialement déphasé d'un quart de période.

Ecriture de deux fonctions Lorsqu'on alimente un transformateur, on observe en deux points du circuit les tensions suivantes, que l'on notera respectivement $u_1(t)$ (en rouge) et $u_2(t)$ (en bleu).



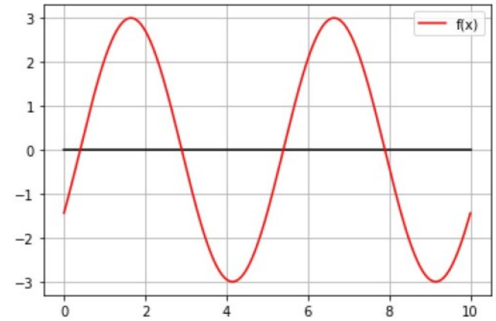
1. Déterminer la période et la pulsation des deux signaux : sont-ils synchrones? Déterminer les amplitudes u_{20} et u_{10} des deux signaux.

2 - Déterminer de trois manières différentes la phase à l'origine du signal rouge si on l'écrit à l'aide d'une fonction *sin*. Déterminer de même, de trois manières différentes, la phase à l'origine du signal bleu, si on l'écrit à l'aide d'une fonction *sin*.

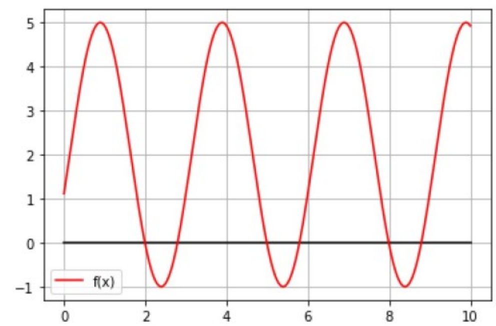
3. Déterminer le déphasage entre ces deux fonctions, en précisant bien quel signal est en avance par rapport à l'autre et en le reliant au signe du déphasage. Est-il cohérent d'avoir un déphasage différent de ⍰/2 au vu des deux courbes?

4. Ecrire les deux signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ correspondants, en prenant comme origine des temps l'instant où $u_2(t)$ est maximale.

Ecritures d'une fonction Soit la fonction ayant le graphe suivant :



1 - Ecrire cette fonction à l'aide d'une fonction *sin*. On déterminera de trois manières différentes la phase à l'origine. Ecrire cette fonction à l'aide de l'argument $t\ t_0$ où t_0 correspond à un instant d'annulation de la fonction. 2 - Ecrire cette fonction à l'aide d'une fonction *cos*. Ecrire cette fonction à l'aide de l'argument $t \quad t_0'$ où t_0'correspond à un maximum de la fonction. Fonction décalée 1 - Reprendre les trois méthodes précédentes et déterminer S_0, S_1, $!$ et $'$ pour le signal suivant, écrit sous la forme : $f(t) = S_0 + S_1 sin(!t + ')$. 2 - Ecrire la fonction à l'aide d'un *cos*.



Somme de fonctions trigonométriques Soit une fonction $t\,!\,f(t) = x_0 cos(!t) + x_1 sin(!t)$. On cherche à déterminer le maximum de cette fonction et à déterminer l'instant où ce maximum est atteint.

1 - On suppose que $f(t) = x_2 cos(!t + ')$. On rappelle que $cos(a+b) = cos(a).cos(b) \quad sin(a).sin(b)$. Développer la deuxième expression de $f(t)$ et en déduire deux relations entre x_2, $'$, x_1 et x_0.

2 - Eliminer $'$ des deux expressions précédentes en utilisant $cos^2 + sin^2 = 1$ et en déduire x_2 en fonction de x_1 et x_0 uniquement.

3 - Déterminer tan' en fonction de x_0 et x_1 uniquement, puis $'$ en fonction des mêmes paramètres. En déduire l'instant t_0 pour lequel $f(t)$ est maximale. Analyser les comportements de t_0 pour des valeurs pertinentes du rapport x_0/x_1.

Deuxième partie

Développements limités

10 Vérification

Vérifier les développements limités suivants et corriger les éventuelles erreurs :
$\frac{1}{1+x} \sim 1 \quad x$; $\frac{1}{a+x} \sim a \quad \frac{x}{a}$; $\frac{1}{a+x} \sim a \quad x$; $\frac{1}{(1+x)^{3/2}} \sim 1 + \frac{3x}{2}$; $\frac{1}{(d+x)^4} \sim d^4 \quad 4x$

11 Solution approchée

On cherche à résoudre l'équation algébrique suivante $k\frac{cos(x)}{(1 \quad x)^2} = x$ où $k =$ 0,1. En supposant que la solution est petite devant 1, linéariser l'équation précédente et en déduire une solution approchée de l'équation. Comparer cette solution à celle issue d'une résolution numérique exacte. Commenter.

12 Pression dans une classe

Une classe de hauteur $h = 3m$, contient de l'air dont la pression à une hauteur z du sol est donnée par : $P(z) = P_0 exp(\ Mgz/RT)$ où $M = 29g.mol^{\ 1}$ est la masse molaire de l'air, g l'intensité du champ de pesanteur, R la constante des gaz parfaits ($R = 8{,}314J.K^{\ 1}.mol^{\ 1}$) et $T = 293K$ est la température de l'air.

1. On pose $H = RT/Mg$. Montrer que H est homogène à une hauteur et donner sa valeur numérique. Comparer cette valeur à la hauteur de la classe. En déduire une expression approchée au premier ordre de $P(z) \ P_0$.
2. Quelle erreur maximale commet-on en considérant la pression uniforme dans la classe?

13 Champ de gravité terrestre

Soit le champ de gravité terrestre $g(r) = g_0 R_T^2 / r^2$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 du champ de gravitation au voisinage de la surface terrestre en fonction de G, M_T, R_T et r. On supposera donc que $r \ R_T << R_T$.
2. Tracer la fonction exacte et la fonction linéarisée en fonction de r. A-t-on tendance à sur ou à sous-estimer $g(r)$ en utilisant son développement limité?

14 Rayonnement d'un corps

Un corps de surface extérieure S portée à la température T en contact avec une atmosphère à la température T_0 rayonne une puissance différentielle $P = S\,(T^4 \ T_0^4)$. Par deux méthodes différentes, linéariser cette puissance différentielle pour T ⇠ T_0. Vérifier que l'homogénéité de la formule est bien la même qu'avant le développement limité.

15 La mission Darwin

La mission Darwin aurait pour localisation un des points de Lagrange du système Terre-Soleil. On admet qu'en un tel point L dit point de Lagrange, situé entre le Soleil et la Terre, à une distance d du Soleil, pour lequel une masse m déposée en L peut tourner à la même vitesse angulaire que la Terre, de sorte que le système S, L et T reste constamment aligné. L'équation donnant la position du point L est : $0 = \quad \frac{GM_S m}{d^2} + \frac{GM_T m}{(D \quad d)^2} + m\Omega^2 d$ où ⌧$^2 = \frac{GM_S}{D^3}$ avec D est la distance Soleil-Terre et M_S et M_T les masses respectives du Soleil et de la Terre.

1. En déduire une relation uniquement entre les grandeurs $x = d/D$ et ⍰ $= M_T/M_S$. Cette relation définit un des points dits de Lagrange du système Soleil-Terre. Numériquement, on trouve $x = 0{,}989$.
2. Retrouver une valeur similaire à l'aide d'un développement limité idoine.

Troisième partie Différentielles 16

Aire d'un disque

Soit un disque de rayon r. Si son rayon varie légèrement de dr, exprimer la variation de son aire, dA. Proposer une interprétation géométrique.

17 Relation de conjugaison

Soit une lentille convergente de distance focale f. Soit un objet à distance algébrique x de cette lentille. La relation de conjugaison donne la position x_0 de l'image de l'objet par la relation : $1/x_0 – 1/x = 1/f_0$ Soit un objet situé en x_0 et se déplaçant de dx. Exprimer la variation dx_0 de la position de son image.

18 Champ de gravité terrestre

L'intensité du champ de gravité en fonction de r distance au centre de la Terre est $g(r) = g_0 R_T^2 / r^2$ où g_0 est l'intensité du champ de gravité à la surface terrestre et R_T le rayon terrestre. On cherche à savoir s'il est pertinent de considérer le champ de gravité comme uniforme.

1. Exprimer la variation infinitésimale dg du champ de gravité pour une variation de distance dr au voisinage de R_T en fonction de g_0, R_T et dr uniquement.
2. Evaluer cette variation pour $dr = h = 30km$, sachant que $g_0 = 9{,}8m.s^{\ 2}$ et $R_T = 6{,}4.10^3 km$. Comparer cette variation à g_0. Commenter l'approximation $g(r)$ ⇠ g_0.

19 Dérivées et différentielles

Exprimer les dérivées par rapport à x puis les différentielles de : x^a, $(x+a)^b$, $(ax+b)^c$, $sin^2(x)$, $sin(kx)$, $cos^2(kx)$, $ln(ax)$, $ln(ax+b)$, $exp(ax^2)$

20 Variations infinitésimales

L'énergie cinétique d'une masse m se déplaçant à la vitesse v, correspondant à une quantité de mouvement $p = mv$ peut se mettre sous la forme : $E = p^2/(2m)$

1. Exprimer la variation infinitésimale d'énergie dE si la quantité de mouvement passe de p_0 à p_0+dp à m fixée. 2. Exprimer la variation infinitésimale d'énergie dE si la masse passe de m_0 à $m_0 + dm$ à charge p_0 fixée.

3. Exprimer la variation de quantité dp si la masse passe de m_0 à $m_0 + dm$ à énergie fixée.

Quatrième partie

Nombres complexes

21 Passages

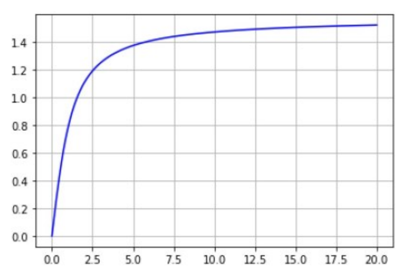
Soit un dipôle électrique caractérisé par un complexe $\underline{Z}$ appelé impédance, qui est de la forme : $\underline{Z} = R + j!L$.

1 - Exprimer le module Z de l'impédance $\underline{Z}$. Tracer

$Z(!)$ en fonction de $!$ pour $!$ variant de 0 à +1. $'(!)$ 2 - Exprimer

l'argument $'$ de l'impédance. Tracer

en fonction deque la fonction$!x$pour7! $arctan!$ variant de(x) est : 0 à +1. On rappelle



3 - Exprimer le complexe $\underline{Z}$ sous forme géométrique.

4 - Représenter ce complexe dans le plan complexe si $Re(\underline{Z}) = 2$ et $Im(\underline{Z}) = 3$. Mesurer le module et l'argument sur cette représentation. Vérifier que l'on retrouve les valeurs théoriques obtenues avec les expressions précédentes.

22 Extraction de grandeurs

Soit un système électrique caractérisé par un complexe $\underline{H}$ appelé fonction de transfert, qui est de la forme : $\underline{H} = \frac{R}{R+j\omega L}$

1 - Exprimer le module G de $\underline{H}$. Tracer $G(!)$ en fonction de $!$ pour $!$ variant de 0 à +1de. $\underline{H}$. Tracer $'(!)$ en fonc2 - Exprimer l'argument $'$

tion de3 - Exprimer le complexe$!$ pour $!$ variant de 0$\underline{H}$àsous forme géométrique.+1.

4 - Déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

5 - Reprendre les questions précdentes pour : $\underline{H_2} = \frac{}{R+j\omega L}$ et $\underline{3}$ $\frac{}{R+j\omega L}$

6 - $\frac{}{j!L}$ $\frac{}{R^0+j!L^0}$ $H =$

Soit un système caractérisé par une grandeur complexe $\underline{Z}$ appelé impédance, qui est de la forme : $\underline{Z} = \frac{j\omega LR}{R+j\omega L} + R$. Donner une condition sur $!$, L et R pour que l'impédance soit strictement réelle. Donner son expression dans ce cas.

23 Egalité entre deux complexes

Soit l'égalité : $A(x+jy) = Be^{jg}$ où A , B, x, y et g sont des réels.

— Exprimer B en fonction de B, x et y.

— Exprimer g en fonction de x et y

— Exprimer x en fonction de A, B et g. Exprimer y en fonction de A, B et g.

TD : Equations différentielles du premier ordre

Première partie

Analyse et résolution analytique d'équations linéaires

1 Quelques outils de base

1 - Pour les équations suivantes, après avoir déterminer la solution, tracer l'allure de la solution en exhibant les valeurs et les pentes d'intérêt (valeur initiale, valeur finale, pente initiale)

— $y' - 4y = 0$ avec $y(t = 2) = 9$ — y'

$+ 7y = 9$ avec $y(t = 0) = 0$

Soit une grandeur $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle :

$\dot{y} + \frac{y}{\tau} = 0$, avec $y(t = 0) = y_0$

2 - On cherche une solution de la forme : $y = e^{rt}$. Réinjecter cette fonction dans l'équation. En déduire r. Réinjecter cette fonction dans la condition initiale. En déduire . Tracer la fonction solution $y(t)$.

Soit une grandeur $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle :

$\dot{y} + \frac{y}{\tau} = \alpha$, avec $y(t = 0) = 0$

3 - On cherche une solution de la forme : $y = e^{rt} + b$. Réinjecter cette fonction dans l'équation. En identifiant les fonctions qui dépendent du temps et les constantes, déduire r et b. Réinjecter cette fonction dans la condition initiale. En déduire . Tracer la fonction solution $y(t)$.

2 Phase d'accélération d'un TGV, modèle simple

Soit un TGV de masse m soumis à une force F_0 et à un frottement fluide linéaire, en bv.

1. Donner l'équation qui régit sa vitesse $v(t)$.
2. Déterminer l'allure et les grandeurs pertinentes de$v(t)$ si la vitesse initiale est nulle. Même question si la vitesse initiale est v_0.
3. Retrouver ces caractéristiques par une résolutionanalytique de l'équation dans les deux cas.

3 Felix

Félix, un homme de masse $m = 80kg$, saute d'un ballon sonde, situé à une altitude h. L'intensité du champ de gravité en fonction de r distance au centre de la Terre est prise égale à sa valeur en surface, g_0. Dans un premier modèle, on néglige les frottements de l'atmosphère et on suppose la chute verticale.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur l'axe descendant$\vec{u_z}$. En déduire la distance z parcourue par Félix en fonction du temps. En déduire l'expression exacte du temps de chute dans ce modèle. Comparer cette expression à l'estimation qualitative précédente et commenter.

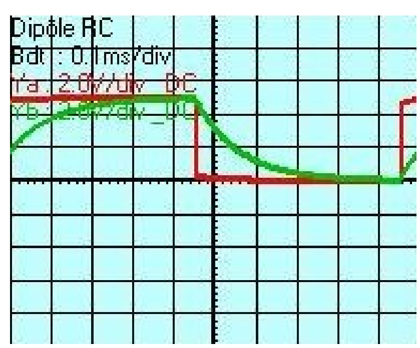
On se place toujours dans le cas d'une chute verticale. Après une certaine durée de chute, correspondant à l'instant noté t_1, alors que Félix a une vitesse égale à v_1, il ouvre son parachute. La force de frottement totale se met alors sous la forme kv.

2. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par la vitesse.
3. La résoudre analytiquement et déterminer les grandeurs pertinentes qui la caractérise, notamment la vitesse limite que l'on notera v_1 et le temps typique mis pour y parvenir.
4. Tracer l'allure de la vitesse au cours de la chute, en prenant $v_1 > v_1$.

4 Extraction de données à partir d'une courbe expérimentale

Soit un système dont une grandeur notée $u(t)$ est régie par une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant, avec un second membre nul à partir d'un instant t_0. L'évolution de cette grandeur est donnée par le graphe ci-après.

1. Déterminer t_0 et donner la condition initiale sur $u(t)$.
2. Déterminer le temps typique de décroissance [illegible].
3. Ecrire $u(t)$.



5 Démarrage d'une voiture

Une voiture M initialement immobile suit la voiture qui la précède, qui démarre à la vitesse v_0 à l'instant $t = 0$. La vitesse de M est continue. On admet que l'équation différentielle qui régit le comportement de M est tel que, pour $t < \tau_1$: $\tau_2 \frac{dv}{dt} + v = 0$

1. Montrer que dans cet intervalle, la solution de cette équation est $v(t) = 0$. A quoi correspond $\square_1$?

Pour $t > \square_1$, on admet que l'équation différentielle est de la forme :$\tau_2 \frac{dv}{dt} + v = v_0$.

2. Résoudre l'équation différentielle dans cet intervalle, en prenant garde à la continuité de v et à la date des conditions initiales. Tracer l'allure de $v(t)$ dans les deux intervalles. A quoi correspond $\square_2$?

3. Déterminer la position de M, $x(t)$, en fonction du temps.

6 Amortissement?

On envisage le mouvement d'un point dont la position est notée $x(t)$. On admet que cette position est régie par l'équation différentielle suivante : $\dot{x} + \square x = 0$. 1. Déterminer $x(t)$ si $x(t = 0) = x_0$.

Pour $t > t_1$. On admet que l'équation différentielle est maintenant de la forme : $\dot{x}\ \square x = 0$. On admet que $x(t)$ est une fonction continue. 2. Déterminer $x(t)$ pour $t > t_1$.

3. Reprendre les deux questions précédentes si l'on change la date de la condition initiale : déterminer $x(t)$ si $x(t_0) = x_0$.

7 Equation sur la vitesse

On envisage le mouvement d'un point dont la position est notée $x(t)$. On admet que cette position est régie par l'équation différentielle suivante : $\ddot{x} + \square \dot{x} = 0$.

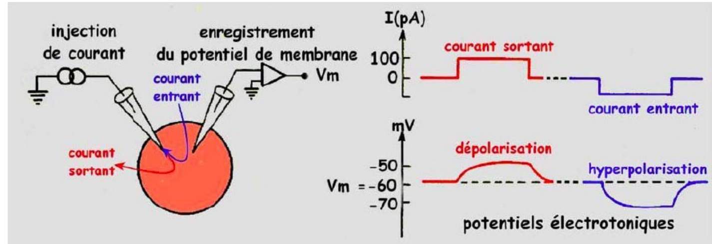
1. Déterminer $\dot{x}(t)$ si $\dot{x}(t = 0) = v_0$. En déduire $x(t)$ si on sait en plus que $x(t = 0) = x_0$.

Pour $t > t_1$. On admet que l'équation différentielle est maintenant de la forme : $\ddot{x}\ \square \dot{x} = 0$. On admet que $\dot{x}(t)$ est une fonction continue. 2. Déterminer $\dot{x}(t)$ et $x(t)$ pour $t > t_1$.

3. Reprendre les deux questions précédentes si l'on change la date de la condition initiale : déterminer $x(t)$ si $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t = t_0) = v_0$.

8 Comportement de la membrane d'un axone

La membrane neuronale est constituée d'une bicouche lipidique à travers laquelle des ions peuvent circuler par l'intermédiaire de canaux dits canaux ioniques. Cette circulation d'ions correspond à un courant électrique, à travers les canaux ioniques. Dans une première expérience, on impose un courant transmembranaire en forme d'échelon et on mesure la tension transmembranaire induite par cet échelon.



La durée totale de l'échelon de courant sortant est $4ms$. A l'aide de ces courbes expérimentales, on cherche à déterminer l'équation différentielle qui régit le comportement de la tension transmembranaire $V(t)$.

1. D'après les graphes précédents, proposer une expression pour $V(t)$ dans la partie dépolarisation. On introduira tous les paramètres pertinents nécessaires et on les estimera sur le graphe.

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $V(t)$ dans cette partie.

3. On suppose que la dépolarisation est stoppée à une date $t_S = 3\square$ et que $V(t)$ est alors régie par la même équation que précédemment, mais sans second membre. Déterminer $V(t)$ pour $t > t_S$ en supposant que $V(t)$ est continue en t_S.

Deuxième partie

Analyse qualitative et semi-quantitative d'équations non-linéaires

9 Autre modèle de l'accélération d'un TGV

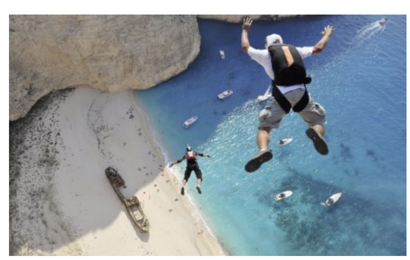
Soit un TGV de masse m soumis à une force F_0. On prend en compte une force de frottement en kv^2.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$. 2. Déterminer l'allure et les grandeurs pertinentes de $v(t)$ solution de cette équation pour $v(t = 0) = 0$ (valeur asymptotique, pente initiale, temps typique d'évolution).

3. Même question si la vitesse initiale est v_0.

10 Base Jump et C_x

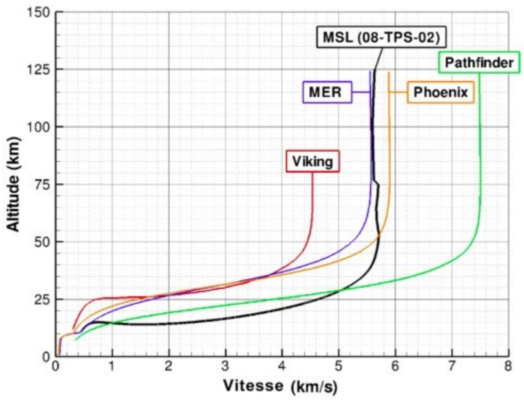
Un corps de surface S qui se déplace dans l'air à allure importante subit une force de frottement de norme $C_x S \rho_{air} \frac{v^2}{2}$.



1. Estimer le C_x d'un homme en chute libre, connaissant sa vitesse limite, de l'ordre de $2.10^2 km/h$.
2. Estimer le temps mis pour atteindre sa vitesse limite.

11 Modèle d'atterrissage sur Mars

Voici quelques courbes donnant l'altitude en fonction de la vitesse de quelques sondes envoyées sur Mars.



1. Dans quel sens sont parcourues ces courbes pendant l'atterrissage? Identifier l'altitude z_0 en deça de laquelle on ne peut pas négliger les frottements de l'atmosphère.

Soit une sonde de masse m. A l'issue de la première phase, la sonde a une vitesse v_0, une altitude z_0. On suppose que la force de frottements peuvent se mettre sous la forme $F_f = bv^3$. On considère le champ de gravité comme uniforme de norme g_m.

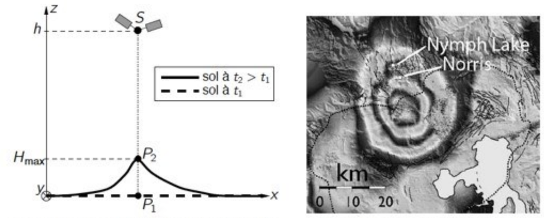
2. Donner la dimension du terme b. A quoi correspondil physiquement (que signifie avoir un grand b ou au contraire avoir un petit b)?
3. Donner l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$.
4. Prévoir le comportement et l'allure de $v(t)$. Construire les grandeurs typiques de son évolution : valeur asymptotique, pente initiale, temps typique d'évolution. On se placera pour le tracé de l'allure dans le cas où

$v_0 > v_{lim}$.

5. En déduire l'allure de $z(t)$ puis celle de $v(z)$. Commenter l'accord avec le graphe.

12 Analyse d'un système stable

Le satellite ENVISAT peut détecter de faibles mouvements du sol au cours du temps. De tels mouvements précèdent souvent un séisme et leur détection est fondamentale pour assurer la sécurité des personnes. On étudie ici un modèle cinétique d'évolution de la hauteur du sol avec le temps en un point du parc de Yellowstone. On admet qu'en début de gonflement, l'équation qui régit la hauteur $h(t)$ du sol en ce point est de la forme : $\dot{h} +$ $h^4 = a$. On admet qu'à l'instant 0, $h = 0$.



(a) Passage du satellite à la verticale du point P à t_1 (sol horizontal) et t_2 (élévation locale du sol d'une hauteur maximum H_{max}).

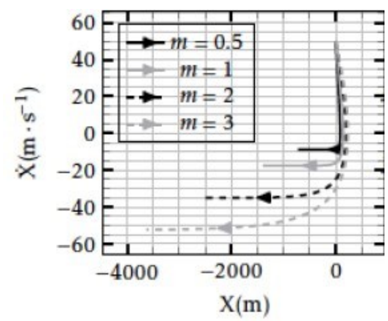
(b) Image InSAR de la déformation du sol à partir de données receuillies par le satellite ERS2 entre 1996 et 2000 (USGS).

FIGURE 9 – Mouvement du sol localisé dans le parc de Yellowstone, USA.

1. Analyser cette équation : prévoir le comportement de la solution, son temps typique d'évolution, sa valeur asymptotique.
2. Tracer l'allure de $h(t)$ en figurant toutes les gandeurs pertinentes.

13 Tribologie

On étudie le mouvement d'une masse m sur un plan incliné d'un angle par rapport à l'horizontale. La masse est lancée dans un mouvement ascendant avec une vitesse initiale v_0. On admet que la masse m est soumise, en plus de son poids et de la réaction normale à des frottements fluides, de résultante $\vec{f}$ dont l'intensité f croît avec le module de la vitesse v selon : $f = {}_n v^n$; avec $_n$ et n des constantes réelles positives. On considère l'angle suffisamment grand pour que l'équilibre ne soit pas possible.



1. Établir l'équation différentielle d'évolution de la vitesse $\dot{x}$.
2. En déduire les expressions de la vitesse limite atteinte asymptotiquement par le point matériel, qu'on notera v_l, et d'une durée caractéristique d'évolution, qu'on notera . On présente sur les courbes ci-dessus des trajectoires dans l'espace des phases $(x; \dot{x})$ correspondant à une même vitesse initiale pour différentes valeurs de la masse du point matériel, indiquée en kg.
3. Expliquer comment lire la vitesse asymptotique d'un mouvement sur les portraits de phase. Donner en particulier, pour les deux figures, la vitesse asymptotique correspondant à $m = 2kg$. Déduire des différentes valeurs de v_l celle de n.
4. Tracer l'allure de la trajectoire $(x; \dot{x})$ correspondant à $m = 3kg$ et à la condition initiale $x = 500m$ et $\dot{x} = 0m.s^{-1}$. On justifiera les coordonnées des points remarquables.

Troisième partie

Résolution analytique d’équations non-linéaires

14 Vitesse d’une réaction chimique

Soit un système siège d’une réaction chimique telle qu’une des concentrations, notée $x(t)$ vérifie l’équation différentielle : $\frac{dx}{dt} = \quad k\sqrt{x}$.

1. Déterminer $x(t)$ si l’on prendre $x(t = 0) = x_0$.
2. En déduire une expression du temps de demiréaction, ⍰$_{1/2}$, tel que $x($⍰$_{1/2}) = x_0/2$. Vérifier l’homogénéité de cette relation et déterminant grâce à l’équation l’homogénéité de k.
3. Mêmes questions si $\frac{dx}{dt} = \quad kx^{3/2}$ et $x(t=0) = x_0$.

15 Système instable?

Soit un système régi par l’équation différentielle $\dot{x} = kx^2$.

1. Déterminer $x(t)$ sachant que $x(0) = x_0$.
2. Le système est-il stable en x_0 ? Construire un temps typique par analyse dimensionnelle. A-t-il une signification physique?

16 Evolution d’une étoile double

On considère une étoile double, constituée d’une étoile très massive et d’une étoile moins massive qui lui tourne autour. La Relativité Générale montre qu’une masse accélérée rayonne de l’énergie sous forme d’ondes gravitationnelles et la distance R entre les deux étoiles vérifie l’équation différentielle : $\frac{dR}{dt} = \quad \frac{k}{R^3}$1. A l’instant $t = 0$, le rayon est R_0. Déterminer $R(t)$. Représenter la trajectoire de l’étoile mobile.

2. Déterminer le temps ⍰$_{1/2}$, tel que $R($⍰$_{1/2}) = R_0/2$.

17 Freinage d’un TGV

Lors du freinage d’un TGV de masse m, la vitesse $v(t)$ vérifie l’équation : $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = \quad \alpha v^3$

1 - Exprimer le terme de gauche en fonction de m, v et $\dot{v}$. En déduire une équation liant $\dot{v}$, ⍰, m et v.

2 - Résoudre cette équation si $v(t = 0) = v_0$. Tracer l’allure de $v(t)$.

3 - Déterminer l’instant t_0 qui correspond à une vitesse $v_0/2$.

4 - La position $x(t)$ est définie par : $v = \frac{dx}{dt}$. Déterminer $x(t)$ en prenant $x(t = 0) = 0$. Tracer l’allure de $x(t)$.

5 - Déterminer la distance parcourue à l’instant t_0.

TD : Equations différentielles linéaires du deuxième ordre

1 Pratique de la résolution

Résoudre les équations ci-après et tracer les allures des solutions sans calculatrice, en précisant les valeurs et les tangentes pertinentes.

$y'' + 9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$. $y''–9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$ $y''–9y = 1$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$ $y'' + y' + 9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$ $y'' + y' + 9y = 1$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$ $y'' + 6y' + 9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$ $y'' + 7y' + 9y = 0$ avec $y(t = 0) = 0$ et $y'(t = 0) = 1$

2 Régimes transitoires

Soit une tension dans un circuit décrite par la fonction $u(t) = u_0 cos(!t)$.

1 - Exprimer $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$, $\ddot{u}(t)$ et $\ddot{u}(t = 0)$. Vérifier que l'on a un lien simple entre $\ddot{u}$ et u.

Soit une grandeur $x(t)$ régie par l'équation différentielle : $m\ddot{x} + kx = 0$.

2 - Montrer qu'une solution de la forme $x = Acos(!_0t)$ convient si l'on n'impose pas les conditions initiales. Une telle solution peut-elle vérifier $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = 06$? Montrer qu'une solution de la forme $x = Asin(!_0t)$ convient si l'on n'impose pas les conditions initiales. Une telle solution peut-elle vérifier $x(t = 0) = x_0$? Vérifier qu'une solution de la forme $x = Acos(!_0t) + Bsin(!_0t)$ convient aussi et peut vérifier $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$.

Soit une grandeur $x(t)$ régie par l'équation différentielle : $\ddot{x} + !_0^2x = 0$.

3 - Vérifier que $x = e^{rt}$ est solution de cette équation différentielle si r vérifie une équation caractéristique que l'on précisera. Si l'on prend simplement une des deux racines, r_1, de cette équation, la solution vérifie-t-elle les conditions initiales $x(t = 0) = x_0$ 2R et $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ 2 R. Vérifier que si l'on prend une combinaison linéaire de la forme : $x = e^{r_1t} + \mu e^{r_2t}$, il est possible de vérifier ces deux conditions initiales à condition que et μ soient des complexes qui vérifient deux équations à préciser. Vérifier qu'une solution de la forme $u(t) = Acos(!_0t)+Bsin(!_0t)$ est bien solution et vérifie les conditions initiales avec des expressions simples pour A et B.

Soit maintenant une tension décrite par la fonction $u(t) = Acos(!t) + Bsin(!t)$.

4 - Exprimer $u(t = 0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$. Sachant que $u(t = 0) = 0$ et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(Acos\,\Omega t + Bsin\,\Omega t)$.

5 - Exprimer $u(t = 0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$. Sachant que $u(t = 0) = 0$ et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$.

6 - Exprimer $u(t = 0)$, $\dot{u}(t)$, $\dot{u}(t = 0)$. Sachant que $u(t = 0) = 0$ et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$, déterminer A et B. Tracer l'allure de cette fonction.

3 Liens quantitatif-qualitatif

Soit un système régi par l'équation différentielle : $\ddot{x} +$ □$\dot{x} +$ $x = 0$

1. A quelle condition sur □ ce mouvement est-il stable? A quelle condition sur □ et correspond-il à un mouvement pseudo-périodique?

On suppose que cette condition est vérifiée dans la suite. 2. Réécrire cette équation sous forme canonique.

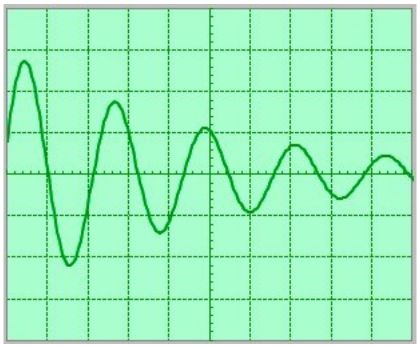
On considère que le facteur de qualité de l'équation est de l'ordre de 5 et que la pulsation propre est de l'ordre de 1. On se donne comme conditions initiales $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0 = 2$

3. Prévoir qualitativement l'allure de $x(t)$ en justifiant succinctement les différentes caractéristiques. 4. Déterminer analytiquement $x(t)$. Vérifier la cohérence des constantes d'intégration. Exprimer le temps caractéristique □ et la pseudo-période T du mouvement en fonction de □ et .

4 Extraction de données

Soit un système dont une grandeur notée $u(t)$ est régie par une équation différentielle d'ordre 2 à coefficient constant, avec un second membre nul à partir d'un instant pris comme origine des temps. L'évolution de cette grandeur est donnée par le graphe ci-après. Le calibre est $5V/div$ et $10ms/div$.

1. Donner les conditions initiales sur $u(t)$.
2. Déterminer la pseudo-période et la pseudo-pulsation. 3. Déterminer le décrément logarithmique et en déduire le facteur de qualité. Pourquoi ne pouvait-on pas le mesurer comme une estimation du nombre d'oscillations visibles?
4. Déterminer le temps typique de décroissance □.
5. Ecrire $u(t)$.



5 Levitron

Soit un aimant de masse $m = 10g$ soumis à son poids et à l'action d'une base aimantée.

On admet que l'interaction base-aimant est telle que l'altitude z du lévitron est régie par l'équation différentielle $\ddot{z}$ = ⍰^2z + . On suppose que $z(t = 0) = 0$ et $\dot{z}(t = 0) = 0$.

1. Déterminer la solution particulière et la solution de l'équation homogène associée. En déduire $z(t)$.

2. Tracer l'allure de $z(t)$. Proposer une période du mouvement.

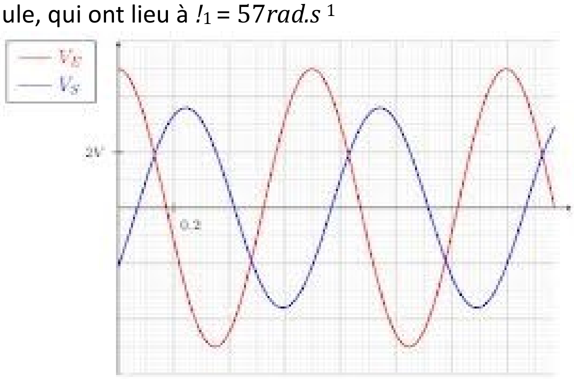
3. Reprendre l'étude avec les conditions initiales : $z(t = 0) = /$⍰^{2} et $\dot{z}(t = 0) = v_0$. Ces nouvelles conditions modifient-elles la périodes des oscillations?

En l'absence de rotation, le lévitron est instable et il est alors régi par l'équation différentielle : $\ddot{z}$ = ⍰^2z . On suppose que $z(t = 0) = /$⍰^{2} et $\dot{z}(t = 0) = v_0$.

4. Prévoir le comportement du lévitron. Déterminer $z(t)$. Commenter.

6 Vibrations d'Ariane

Le décollage d'une fusée s'accompagne de vibrations importantes. On étudie les vibrations d'un capteur à la surface du module, qui ont lieu à $!_1 = 57 rad.s$ 1



1. La courbe de déplacement $x(t)$ du capteur en fonction du temps est figurée ci-avant - courbe bleu. Donner l'échelle temporelle utilisée pour ce graphe. Ecrire le déplacement sous la forme d'une sinusoïde pour laquelle on précisera les grandeurs caractéristiques qui la déterminent - amplitude, pulsation, phase à l'origine. On admet que l'échelle verticale est telle que 1 carreau corresponde à $1mm$.

2. Donner la forme générale de l'équation différentielle qui a pour solution $x(t)$ et préciser les conditions initiales $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ sur cette grandeur, au vu de la courbe réponse.

En pratique, on place de petites plaques de plastiques pour amortir les vibrations du module et ainsi éviter sa dégradation. Dans l'équation précédente, on peut prendre en compte cet amortissement en ajoutant un terme en

⍰$\dot{x}$.

3. Où faut-il ajouter ce terme dans l'équation précédente pour qu'il y ait amortissement? Quelle est l'homogénéité de ⍰?

4. Donner une condition pour que l'amortissement soit apériodique.

On suppose que l'inégalité précédente est vérifiée. On prend les mêmes conditions initiales que dans la courbes précédentes.

5. Déterminer $x(t)$ dans ce cas. Montrer que pour un temps suffisamment long, un des deux termes de cette expression est négligeable et donner l'expression approchée de $x(t)$ dans ce cas.

6. En déduire une expression approchée du temps mis pour atteindre $x_0/10$ en fonction de ⍰ notamment.

7 Point sur un cercle

Soit un point astreint à se déplacer sur un cercle de rayon a centré sur O. On le repère dans un premier temps en coordonnées cartésiennes (x,y). On se place dans le cas où $y > 0$.

1 - Rappeler l'équation d'un cercle de rayon a. Donner l'expression $y(x)$ de la trajectoire du point.

2 - En déduire l'expression cartésiennes du vecteur vitesse $!v$ en fonction de a, x et $\dot{x}$ uniquement. Donner la norme de ce vecteur en fonction des mêmes grandeurs.

3 - On suppose que cette norme est égale à v_0. En déduire une expression de la grandeur $\dot{x}^2$ en fonction de v_0, a et x. Dériver par rapport au temps cette égalité et obtenir une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. En déduire la forme générale de $x(t)$ en exhibant

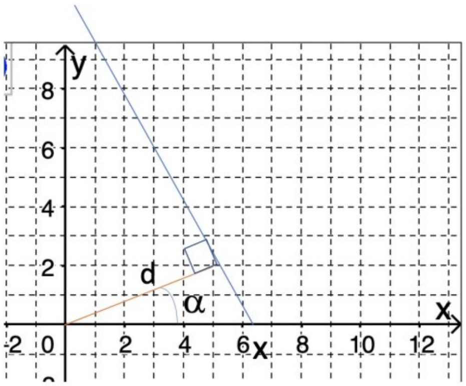
une pulsation $!_0$ en fonction des paramètres constants du problème. Commenter.

TD : Géométrie et calculs vectoriels

1 If this is your first night at fight club...

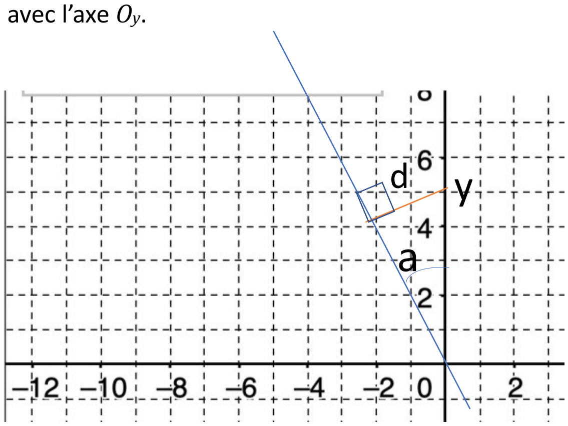
On considère la situation suivante, dans laquelle on considère une onde qui se propage dans une direction qui fait un angle ⍰ avec l'horizontale $u!_x$. On cherche à déterminer la distance d parcourue par l'onde entre le point O (origine du repère) et la surface d'onde figurée en rouge (cette surface, figurée par une droite bleue, est perpendiculaire à la direction rouge). et ce, dans plusieurs situations.

On connait d'abord l'abscisse x de l'intersection de la droite bleue avec l'axe O_x.



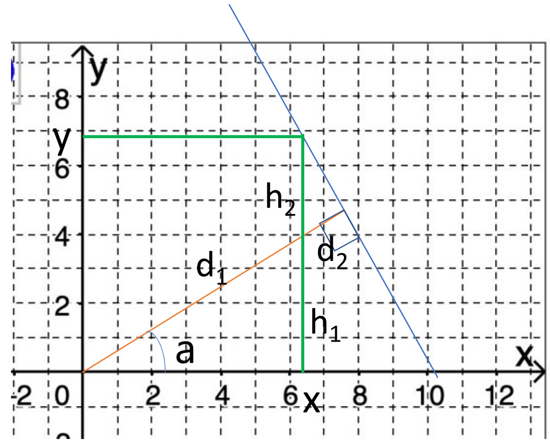
1 - Exprimer d en fonction de x et ⍰.

La droite rouhe est maintenant décalée et ne passe plus par O, mais sa direction fait toujours un angle ⍰ avec $u!_x$. On connait maintenant l'ordonnée y de l'intersection de la droite rouge avec l'axe O_y.



2 - Exprimer d la longueur du segment rouge dans ce cas en fonction de y et ⍰.

On connait à présent la position d'un point repéré par ses coordonnées (x,y) (visualisées par les segments verts) qui appartient à la droite bleue.



3 - Exprimer d_1 en fonction de x et ⍰. 4 - Exprimer h_1 en fonction de x et ⍰.

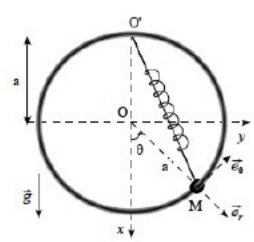
5 - En déduire h_2 en fonction de x, y et ⍰. 6 - En déduire d_2 en fonction de x, y et ⍰. 7 - En déduire que $d = x.cos⍰ + ysin⍰$

8 - Exprimer le vecteur unitaire $!u_r$ de la droite rouge dans la base $(u!_x,u!_y)$ en fonction de ⍰. Vérifier qu'il est bien de norme 1.

9 - Soit M le point de coordonnées (x,y). Calculer $!u_r.!OM$. Vérifier que $!u_r.!OM = d$.

2 Calcul de longueur

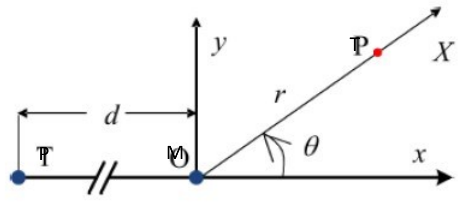
Un anneau P est astreint à se déplacer sur un demicercle de centre O, de rayon a. (O_x,OM) = ✓. On considère un ressort attaché par une extrémité en O_0 point situé au-dessus de O, à une distance a et à l'autre extrémité en P. On note $u!_x$ le vecteur unitaire descendant et on utilise la base $(!e_r,!e_✓)$ orthonormée telle que $!e_r$ fait un angle ✓avec $!u_x$. On note $!u_y$ le vecteur horizontal unitaire vers la droite du schéma.



1. Exprimer la distance O_0P en fonction de a et de ✓ uniquement.
2. Vérifier la cohérence de cette expression en donnant à ✓des valeurs particulières.

3 Gravitation

On considère un point T, de masse m, situé en un point générique proche à la surface d'une planète dont le centre est noté M. On cherche à quantifier l'action du champ de gravitation d'une masse M_P placée en un point P.



1. Exprimer la distance PT en fonction de d, r et ✓.
2. Vérifier l'expression pour des valeurs pertinentes de ✓.
3. Exprimer la norme de la force de gravitation exercée par P sur T.

4 Enroulement d'un fil

Soit un cylindre de rayon R d'axe horizontal. On accroche un fil sur le cylindre en un point noté A. On étudie le mouvement d'une masse m située à l'autre extrémité du fil. La longueur du fil est notée L_0. On suppose que la masse m part pratiquement sans vitesse initiale à l'horizontale de A, la corde étant tendue (Cf. schéma suivant).

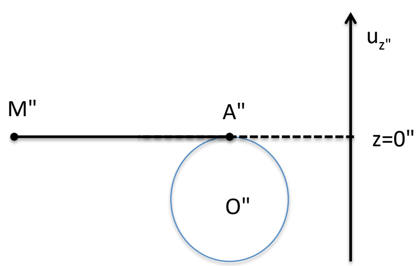


Schéma de la situation initiale.

Soit O l'origine du système de coordonnées. Après $t = 0$, la corde s'enroule autour du cylindre. On note I le dernier point de contact entre la corde et le cylindre à un instant donné. On repère la position du point I à la surface du cylindre par l'angle ✓, compté depuis A. On suppose que le brin non encore enroulé est tangent au cylindre et on note L(✓) sa longueur.

1. Faire un schéma du système dans une situation générique.
2. Exprimer la longueur enroulée en fonction de R et ✓. Exprimer la longueur non encore enroulée notée L en fonction de L_0, R et ✓.
3. En prenant comme origine des altitudes le point A, exprimer l'altitude du point I, $z(I)$, en fonction de R et ✓ uniquement.
4. Exprimer l'altitude de de M en fonction de L_0, R et ✓.

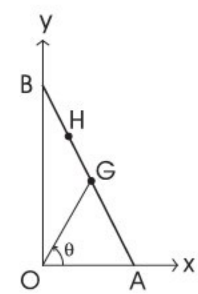
5 Forçage d'un astéroïde par une planète

Le caractère géocroiseur d'un astéroïde peut-être influencé par les interactions avec tous les astres du système solaire et des milliers d'astéroïdes doivent donc être surveillés en continu. On cherche à traduire l'influence des planètes du système solaire sur la trajectoire d'un astéroïde. Soit une planète P, de masse M_P qui gravite autour du Soleil O à une distance R_P avec une position angulaire ✓$_P(t)$. On suppose pour simplifier que l'astéroïde étudié M, de masse m, a une orbite circulaire de rayon r et une position angulaire sur cette trajectoire ✓(t).

1. Faire un schéma.
2. Exprimer la distance d_{MMP} entre m et M_P en fonction de r, R_P, = ✓$_P$ ✓. Exprimer la norme de la force de gravitation exercée par la planète sur l'astéroïde.

6 Homme sur une échelle

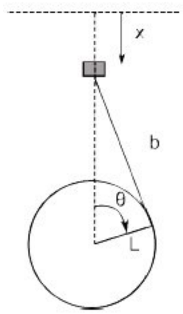
Un homme H monte à une échelle de hauteur $2L$. L'échelle est appuyée en A sur le sol et en B sur un mur vertical. Lorsque l'homme a monté les trois quarts de l'échelle, celle-ci se met à glisser. On pourra noter G le milieu de l'échelle, avec $R = OG$ et ✓l'angle (O_x,!OG).



1. Exprimer x_H(✓) et y_H(✓).
2. Vérifier les expressions en donnant à l'angle des valeurs pertinentes.

7 Piston dans un moteur

Un piston de moteur que l'on assimilera ici à un point matériel M, est astreint à se déplacer suivant un axe rectiligne. Il est relié au vilebrequin par l'intermédiaire d'une bielle de longueur b. Le vilebrequin a un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire !. Sa position est repéré par l'angle ✓(t); tel que ✓= 0 lorsque le piston est au point mort haut. La manivelle du vilebrequin a pour longueur L. On repère la position du piston par son déplacement $x(t)$ mesuré par rapport au point mort haut.



1. Exprimer x en fonction de L, b et ✓.
2. Simplifier cette expression en considérant que en considérant que L b. Quel est le type du mouvement du piston?
3. Exprimer la vitesse instantanée $v(t)$ du piston en faisant l'approximation précédente et sans faire l'approximation.

8 Projection de forces

Soient trois forces !P , !N et !T de normes respectives P, N et T et de direction indiquées sur le schéma. En fonction de P, N, T et ⍰ :

1. Exprimer ces trois forces dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, puis dans la base $(\overrightarrow{u_x}', \overrightarrow{u_y}')$.
2. Exprimer les vecteurs de base $(\overrightarrow{u_x}', \overrightarrow{u_y}')$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ →′ →′, puis les vecteurs de base (!u_x,!u_y) dans la base (u_x,u).

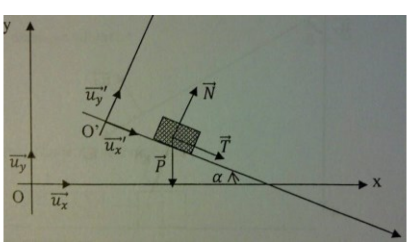
y Exprimer P

3. ! + !N + !T dans la base $(\overrightarrow{u_x}', \overrightarrow{u_y}')$.

Exprimer !P !T .

4. Soit un vecteur !v de norme v en faisant un angle avec la direction !u_{x0}. Exprimer !P .!v en fonction de P, v,

et ⍰.

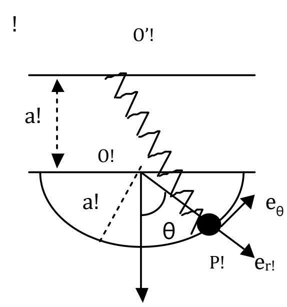


9 Produit scalaire

1. Soit une base orthonormée du plan (!u_x,!u_y). Soit un vecteur unitaire !u faisant un angle ⍰ avec u!$_x$. Donner sa projection dans la base (!u_x,!u_y).
2. Soit un vecteur unitaire !v faisant un angle avec !u_y. Donner sa projection dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.
3. Exprimer !u .!v .
4. Soit une base orthonormée du plan $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Soit un vecteur !$u_r$ faisant un angle ✓ avec !u_x. Faire un schéma et donner sa projection dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.
5. Soit un vecteur u!✓faisant un angle ✓avec u!$_y$. Faire un schéma et donner sa projection dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.
6. Exprimer maintenant les vecteurs (!u_x,!u_y) dans la base (u!$_r$,!u✓).
7. Vérifier que la norme de ces deux vecteurs avec ces nouvelles expressions est bien 1 Soit le vecteur !w = 2cos✓u!$_r$ + sin✓u!✓
8. Exprimer !w.u!$_x$ soit en passant par la décomposition de (!u_r,!u✓) dans (!u_x,u!$_y$), soit en passant par l'expression de !u_x dans (!u_r,!u✓). Vérifier que le résultat est le même.
9. Exprimer en fonction uniquement de cos✓la norme du vecteur !w.

10 Construction de vecteurs

Un anneau P est astreint à se déplacer sur un demicercle de centre O, de rayon a. (O_x,OM) = ✓. On considère un ressort attaché par une extrémité en O_0 point situé au-dessus de O, à une distance a et à l'autre extrémité en P. On note u!$_x$ le vecteur unitaire descendant et on utilise la base (!e_r,!e✓) orthonormée telle que !e_r fait un angle ✓avec !u_x. On note !u_y le vecteur horizontal unitaire vers la droite du schéma.



1. Exprimer les deux vecteurs !e_r et !e✓dans la base (!u_x,!u_y).
2. Exprimer !O_0O dans la base la plus adaptée (ayant la décomposition la plus simple). De même avec !OP.

3. En déduire $!O_0P$ dans la base $(!e_r,!e_✓)$.

4. En déduire la norme de $!O_0P$.

5. En déduire le vecteur unitaire $\frac{O'P}{\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|}$! . Simplifier son expression à l'aide de $✓/2$. Vérifier que ce vecteur est bien de norme 1.

6. Exprimer le vecteur unitaire normal à ce vecteur.

11 Théorème d'Al-Kashi par Pythagore

Soient deux vecteurs $!u_1$ et $!u_2$ formant un angle ✓. On se donne une base orthonormée du plan $(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$ telle que $!u_1$ soit dans la direction de $!u_x$.

1. Faire un schéma et figurer u_1, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$! .

2. Figurer le triangle rectangle rectangle dont l'hypothénuse est $!u_1 + !u_2$ et dont le côté adjacent est colinéaire à $!u_x$.

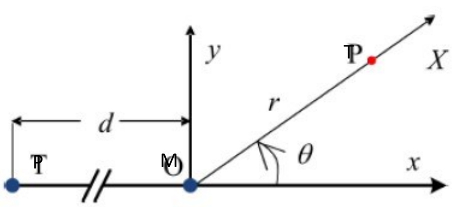
3. Exprimer la longueur du côté adjacent de ce triangle en fonction de $\|\overrightarrow{u_1}\|$, $\|\overrightarrow{u_2}\|$ et θ.

4. Exprimer la longueur du côté opposée de ce triangle en fonction de $\mathrm{k}!u_2\mathrm{k}$ et ✓.

5. A l'aide du théorème de Pythagore, déterminer la longueur de $!u_1 + !u_2$ et vérifier le théorème d'Al-Kashi.

12 Gravitation

On considère un point-test T, de masse m, situé en un point générique proche à la surface d'une planète dont le centre est noté M. On cherche à quantifier l'action du champ de gravitation d'une masse M_P placée en un point P.



1. Exprimer la distance PT en fonction de d, r et ✓.

2. Vérifier l'expression pour des valeurs pertinentes de ✓.

3. A l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $!PT$ dans la base cartésienne $(!u_x,!u_y)$ en fonction de d, r et ✓.

4. A l'aide de la définition de la norme d'un vecteur, retrouver l'expression de la distance PT à l'aide du vecteur $!PT$. Vérifier qu'elle est bien cohérente avec l'expression établie précédemment.

5. Exprimer la force de gravitation exercée par P sur T dans la base cartésienne $(!u_x,!u_y)$, à l'aide des grandeurs r, d, M_p, m, G et ✓.

13 Variations d'un vecteur

1. Soit une base orthonormée du plan $(u!_x,u!_y)$. Soit un vecteur $!u_r$ faisant un angle ✓avec $u!_x$. Faire un schéma et donner sa projection dans la base $(!u_x,!u_y)$.

2. Soit un vecteur $u!_✓$faisant un angle ✓avec $u!_y$. Faire un schéma et donner sa projection dans la base $(!u_x,!u_y)$. 3. Représenter les vecteurs $u!_r$ et $u!_✓$pour $\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{4}$, $✓_3$ = ⍰, $✓_4$ = 3⍰ et $✓_5$ = 5⍰.

2 4 4

La base $(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$ est supposée fixe, c'est-à-dire qu'elle ne varie pas au cours du temps. En revanche, on suppose que l'angle ✓varie, ce qui fait varier le vecteur $!u_r$.

4. Exprimer $\frac{du_r}{d\theta}$! dans la base $\underset{\rightarrow}{(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})}$. Vérifier que $\frac{du_r}{d\theta} = u_\theta$! !. Vérifier de même que $\frac{du_\theta}{d\theta} = \ u_r$!. Proposer une interprétation géométrique de ces relations.

On suppose que l'angle ✓varie à la vitesse angulaire $\underline{ddt✓}$= ✓˙.

5. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, en déduire $\frac{du_r}{dt}$! en fonction de $!u_✓$et ✓˙.

6. En suivant la même démarche, lier $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$, $\overrightarrow{u_r}$ et $\dot{\theta}$.

14 Détection d'exoplanète

On considère une étoile notée E orbitant autour d'un barycentre G sur une trajectoire circulaire uniforme. La vitesse de l'étoile par rapport à G est notée $!v$ et elle est orthoradiale, tangente à la trajectoire relative. On note $!v_G$ la vitesse de G par rapport à la Terre. On note $D(t) = OG(t)$ et $R = GE$

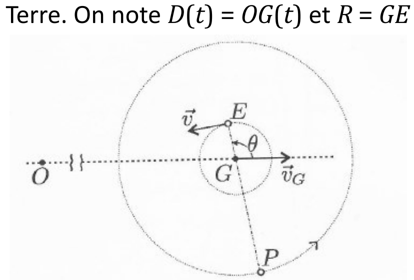


FIGURE 2 – Etoile-Planète

1. La vitesse relative de E par rapport à O est la somme vectorielle de $!v$ et de $!v_G$. Exprimer cette vitesse relative dans la base $(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$ si u_x! est le vecteur unitaire dans la direction OG et $u!_y$ son perpendiculaire.

2. Exprimer la vitesse radiale relative v_r qui est la projection de la vitesse de E par rapport à O sur $\vec{u}_x$. Quel est l'intervalle de variation de cette fonction?

3. Exprimer la distance OE en fonction de R, D et ✓. Quel est l'intervalle de variation de cette fonction?

15 Positionnement dans la Voie Lactée

La mesure de la vitesse relative d'un point par rapport au système solaire - basée sur l'étude de l'effet doppler - permet de remonter positionner ce point dans la Voie
Lactée.

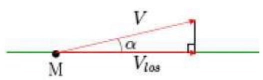
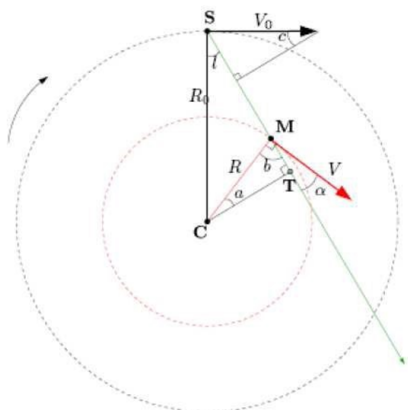


Fig.2-.1:la vitesse d'un nuage projetée sur la ligne de visée.



On suppose connus le rayon galactique du système solaire $R_0 = 8{,}5kpc$ et sa vitesse $v_0 = 220km.s^{-1}$. On note R le rayon galactique du nuage de gaz observé, l sa longitude galactique.

1. Exprimer la vitesse relative du point M en fonction de v_0, l, v et ⍰.

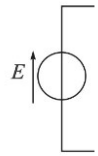
2. Montrer que les angles a et ⍰ du schéma sont liés. Rappeler la relation des sinus dans un triangle. En déduire une expression de ⍰ en fonction de R, R_0 et l.

3. En déduire une expression de la vitesse relative v_r ne faisant intervenir que les grandeurs v_0, v, R, R_0 et l.

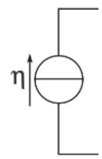
TD : Rappels d'électrocinétique : loi des noeuds et loi des mailles

Rappels

Une source idéale de tension impose à ses bornes un courant constant (ici, E), et le courant dans sa branche est inconnu :

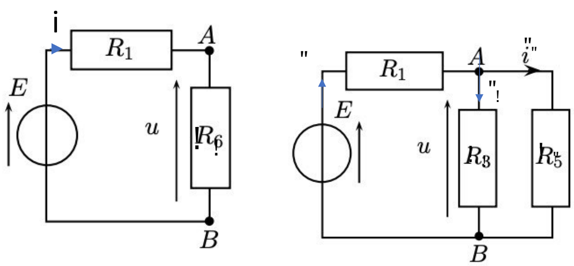


Une source idéale de courant impose dans sa branche un courant constant (ici, ⍰) et la tension à ses bornes est inconnue.



1 Manipulation classiques

Soient les montages :



1. Ecrire la loi des mailles dans le premier montage. Ecrire la loi d'Ohm pour les deux résistances R_1 et R_2. En déduire de même le courant dans le circuit i en fonction des mêmes variables.

2 - En déduire u en fonction uniquement de E_0, R_1 et R_2.

3 - Ecrire la loi des mailles dans le deuxième montage. Ecrire la loi des noeuds. Ecrire la loi d'Ohm pour les deux résistances R_2 et R_3. En déduire u en fonction uniquement de E, R_1, R_2 et R_3.

4 - Vérifier que l'on retrouve dans cette formule la loi d'association des résistances en parallèle.

2 Adaptation d'une charge

On cherche à illustrer la nécessité d'une adaptation de la charge

à sa source dans un circuit électrique quel1

conque. Pour cela, on envisage un générateur modélisé par l'association en série d'une source idéale de tension de force électromotrice E et d'une résistance r qui alimente une résistance R variable.

1 - Faire un schéma du circuit électrique.

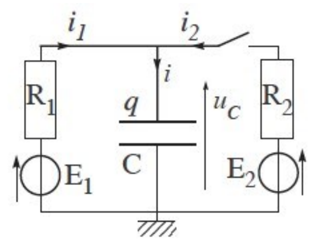
2 - Exprimer la tension U aux bornes de R en fonction uniquement de E, R et r.

3 - Exprimer la puissance fournie $P(R)$ à la résistance R en fonction uniquement de E, R et r. Déterminer la valeur R_{ad} de R pour laquelle la puissance consommée par la résistance variable est maximale. Commenter.

4 - Tracer l'allure de $P(R)$.

3 Régime permanent

Soit le circuit suivant, dans lequel, pour des temps négatifs, l'ensemble du système a atteint son régime permanent.



1 - Déterminer i, i_1, i_2 et u_c en régime permanent.

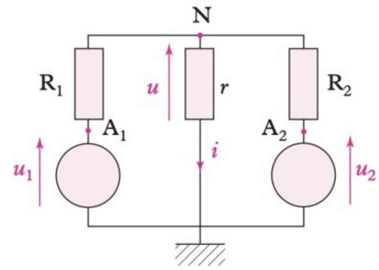
2 - Déterminer les mêmes grandeurs en régimes permanent si l'on ferme l'interrupteur K si l'on admet qu'en régime permanent le concdensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

4 Exercices techniques

1 - Dans le circuit suivant, écrire la loi des noeuds en N, on pourra appeler i_1 et i_2 les courants respectivement dans R_1 et R_2, ces courants étant définis comme se dirigeant vers N.

2 - Ecrire les lois des mailles dans les deux mailles en déduire des liens entre i, i_1, R_1, r et u_1 d'une part, et i, i_2, R_2, r et u_2 d'autre part

3 - En déduire le courant i en fonction uniquement de R_1, R_2, u_1, u_2 et R.



4 - Déterminer et calculer la puissance reçue par la même résistance.

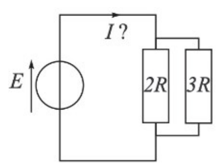
5 Associations de résistances et conséquences

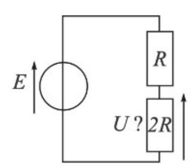
Associations

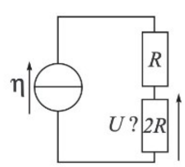
1 - Montrer que l'association en série de deux résistances R_1 et R_2 est équivalente à une résistance $R_S = R_1+R_2$.

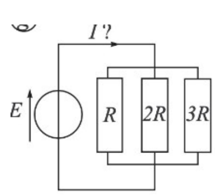
2 - Montrer que l'association en parallèle de deux résistances R_1 et R_2 est équivalente à une résistance $R_{//} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$.

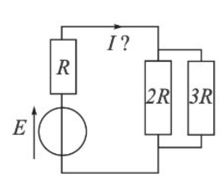
Applications Déterminer la grandeur demandée en fonction de R et E (ou R et ⍰) uniquement à l'aide des résultats précédents et/ou à l'aide des lois des noeuds ou des mailles :











TD : Outils mathématiques

Première partie Généralités 1

Tracé d'allures

Cf. calculatrice

Puissance débitée par une pile 1 - Cf. calculatrice

2 - Pour déterminer la valeur de l'intensité qui maximise cette puissance, on calcule la dérivée de la puissance par rapport à I et on cherche l'abscisse où cette dérivée s'annule, ce qui donne : $\frac{dP}{di} = E_0 \quad 2Ri$ qui est nulle pour $\boxed{i_0 = \frac{E_0}{2R}}$.

Et la valeur de la puissance maximale est donc :

$\boxed{P(i_0) = \frac{E_0^2}{2R}}$

Mouvement d'un mobile 1 - Cf. calculatrice.

2 - Pour exprimer la position x_0 du minimum local de cette fonction, on cherche l'abscisse d'annulation de sa dérivée, ce qui donne :

$\frac{dE_P}{dx} = 3\frac{k}{x^4} + mgsin$ qui s'annule en : $\boxed{x_{min} = 3\frac{k}{mgsin}^{1/4}}$

Charge d'un capteur capacitif 1 - Cf. calculatrice.

2 - La pente initiale de la fonction est la valeur initiale de la dérivée. Or : $U = E(1 \quad e^{\quad t/\tau})$ donc $\boxed{\frac{dU}{dt} = \frac{E}{\tau}e^{\quad t/\tau}}$ qui vaut en $t = 0$: $\boxed{\left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{\tau}}$

3 - L'expression de la fonction $h(t)$, tangente à $U(t)$ en $t = 0$ est donnée en adaptant la formule générale de la tangente d'une fonction f de l'argument x en un point x_0 : $f(x)$ ' $t(x) = f(x_0) + (x \; x_0).\frac{df}{dx}_{x_0}$

Ce qui donne ici : $\boxed{U(t) \text{ ' } h(t) = U(0) + (t \quad 0) \frac{dU}{dt}_0 = 0 + \frac{E}{\tau}t}$ qui est bien tangente à $U(t)$ en $t = 0$.

4 - Si l'on note t_{10} le temps pour que $U(t)$ atteigne 10% de sa valeur maximale qui est E, on a par définition : $U(t_{10}) = \frac{E}{10} = E.(1 \quad e^{\quad t_{10}/\tau})$ et de même : $U(t_{90}) = \frac{9E}{10} = E(1 \quad e^{\quad t_{90}/\tau})$ donc (les inversions donnent : $t_{10} = \quad \tau ln\frac{9}{10}$ et $t_{90} = \quad \tau ln\frac{1}{10}$.

Par définition : $\boxed{t_m = t_{90} \quad t_{10} = \tau ln 9}$

Impédance d'un dipôle 1 - Tracer l'allure de ce module en fonction de 2 - Le domaine ω pour de $\omega\omega$ variant dedans lequel 0 à R^2 donc si : $\boxed{\omega \ll \frac{R}{L} = \omega_C}$ +il1.est pertinent de considérer z comme une constante correspond à la situation pour laquelle le terme en ω^2L^2; dans ce cas : $\boxed{z = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2} \simeq \sqrt{R^2} = R}$

Au contraire, le domaine de ω dans lequel il est pertinent de considérer z comme une fonction linéaire correspond à la situation pour laquelle le terme $\omega^2L^2 \gg R^2$ donc $\boxed{\omega \gg \frac{R}{L} = \omega_C}$ dans ce domaine : $\boxed{z = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2} \simeq \sqrt{\omega^2L^2} = \omega L}$

2 Modèle de force non-linéaire

1. Pour déterminer le maximum de la fonction $y(x) = \frac{kx}{x^2+x_0^2}$, il suffit de voir quand sa dérivée s'annule : $\frac{dy}{dx} = k\frac{(x^2+x_0^2) - 2x^2}{(x^2+x_0^2)^2}$ qui s'annule clairement quand

$\boxed{x = x_0}$

La valeur du maximum est donc $\boxed{y(x_0) = \frac{k}{2x_0}}$.

On voit sur la courbe que le max est atteint en $x = x_0 = 1$ ce qui donne la valeur de x_0 et on voit que ce max vaut $y_{max} = 3,5 = \frac{k}{2\times1}$ donc $\boxed{k = 7}$

2. Pour déterminer le modèle affine de cette caractéristique au voisinage de $x = 3$, on utilise l'équation de la tangente : $t(x) = y'(x_1).(x \; x_1) + y(x_1)$ pour $\boxed{x_1 = 3}$ — soit on utilise l'expression de $y(x)$ avec les valeurs de k et de x_0 déterminées précédemment et on a :

$\boxed{y(x_1 = 3) = 2}$ et $\boxed{y'(x_1) = \quad 0,56}$

— Soit on utilise le graphe, on voit que $\boxed{y(x_1 = 3) = 2}$ et que $\boxed{y'(x_1) = \quad 0,6}$. Donc, le modèle affine de la fonction au voisinage de $x_1 = 3$ est $\boxed{t(x) = \quad 0,6.(x \quad 3) + 2}$

3. L'équation qui permet de savoir à quelle distance de ce point la modélisation s'aloigne de la réalité de plus de 0,1 correspond à rechercher la solution de l'équation $y(x) \; t(x) = 0,1$ i.e. $y(x) \quad 2 = 0,1$

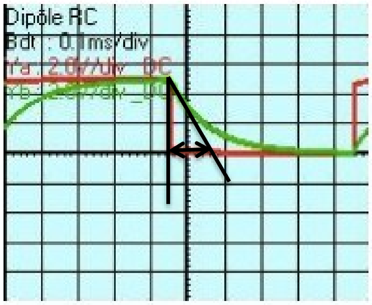
$\boxed{t(x) = \frac{7x}{x^2+1} + 0,6.(x \quad 3)}$

3 Mise en forme d'un signal

Les réglages sont $0,1ms/div$ et $2V/div$.

1. A l'aide du graphe, l'amplitude est 2,5 carreaux donc $\boxed{u_0 = 5V}$

Pour le temps typique de décroissance, on utilise la méthode de la tangente à l'origine, mais il faut faire attention à l'origine des temps.



Sur le graphe, on lit une intersection qui a lieu 1 carreau après le début de la décroissance, donc. $\boxed{⍰ = 0{,}1ms}$

2. Le signal $u(t)$ est une exponentielle décroissante, qui comme à décroître en un instant t_0, donc elle est de la forme. $\boxed{u = u_0 e^{(t\ t_0)/⍰}}$

Or t_0 est négatif sur le graphe et il correspond environ à un 1/2 carreau, donc $t_0 = 0{,}05ms$

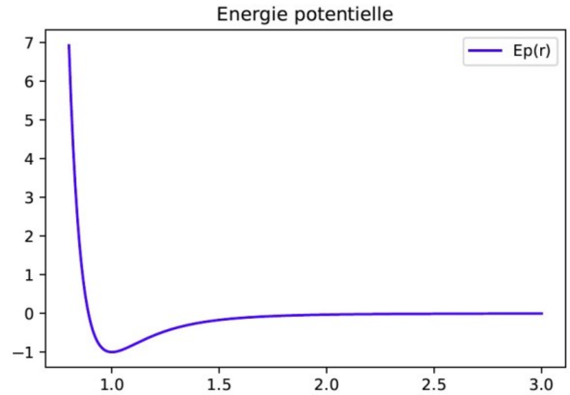
L'amplitude du signal au moment où l'alimentation reprend, i.e. 4,5 carreaux après $t = 0$ i.e. à l'instant $t_1 = 0{,}045ms$ est donc donnée parce $\boxed{u(t_1) = u_0 e^{(t_1\ t_0)/⍰}}$ qui donne numériquement $u(t_1)$ =

Ce signal est nul avec une précision que l'on peut estimer par le rapport de la valeur en t_1 et de la valeur maximale, i.e. u_0, ce rapport vaut $e^{(t_1\ t_0)/⍰}$ =

La largeur du trait de mesure est de l'ordre de 1/10 de carreau, ce qui correspond à une imprécision de $2/10 = 0{,}2V$ ce qui est nettement supérieur à la valeur théorique en t_1. On peut donc considérer qu'aux incertitudes expérimentales près, le signal est nul en t_1

4 Interaction de Van der Waals

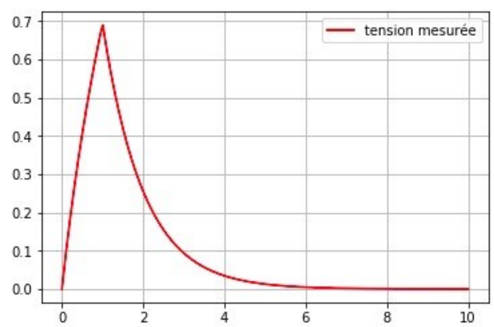
1. On sait que $E_p(r) = \frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}$ à la dimension d'une énergie, i.e. des J, donc $a = J.m^6$ et $b = J.m^{12}$ de sorte que les deux termes soient homogènes à des J. Dans les régions où r est faible, c'est le terme en $1/r^{12}$ qui domine et dans les régions où r est grand, c'est le terme en $1/r^6$ qui est négatif qui domine, ce qui donne l'allure suivante :



2. La valeur r_e de r qui correspond au minimum de l'énergie potentielle, correspond à l'annulation de la dérivée : $\frac{dE_p}{dr} = \frac{6a}{r_e^7} \quad \frac{12b}{r_e^{13}} = 0$ donne $\boxed{r_e = \sqrt[6]{\frac{2b}{a}}}$

5 Détecteur de particules

1. L'allure de $V(t)$ est une juxtaposition d'une fonction *log* croissante et d'une fonction en exponentielle décroissante, telle qu'elle soit continue à la jonction :



⍰ correspond au temps typique de variation de la fonction dans sa partie croissante (c'est-à-dire au temps nécessaire pour que l'argument du ln passe de 1 à 2)

et est l'inverse du temps typique de décroissance de l'exponentielle, c'est-à-dire qu'à partir d'un temps égal à quelques 1/ , l'argument de l'exponentielle sera grand devant 1 et l'exponentielle sera faible.

La valeur extrémale de $V(t)$ est la valeur en t_1 $V(t_1) =$ 1 0 1 $V = V\, ln(1 + t/⍰)$

Pour déterminer A, on écrit la continuité de la fonction en t_1, ce qui donne : $V(t_1) = V_1 = V_0 ln(1+t_1/⍰) = Ae^{\ t_1}$ Donc :

$A = V_1 e^{\ t_1}$

Ainsi, on a bien une fonction $V(t)$ qui s'écrit pour $t > t_1$ sous la forme :

$\boxed{V(t) = V_1 e^{\ (t\ t_1)}}$ dont on voit bien qu'elle voit V_1 en $t = t_1$.

2. La dérivée temporelle de $V(t)$ en $t = 0$ vaut :

$$\dot V(t=0) = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{\tau}\left(\frac{1}{1+t/\tau}\right)_{t=0} = \left(\frac{V_0}{\tau+t}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{\tau}$$

La dérivée seconde de $V(t)$ en $t = 0$ est :

$$\ddot V(t=0) = \left(\frac{d^2V}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{V_0}{(\tau+t)^2}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{\tau^2}$$

Il n'y a aucun rapport entre ces deux grandeurs : la dérivée d'une fonction en un point n'a rien à voir avec la valeur de cette fonction en ce point. On peut par exemple tout à fait envisager une fonction nulle en un point dont la dérivée en ce point est non-nulle.

3. Le temps de montée t_m défini comme le temps mis par le signal pour atteindre la moitié de sa valeur extrémale est donc donné par la relation :

$$V(t_m) = V_0 ln(1 + t_m/\tau) = \frac{V_1}{2}$$

Ce qui donne :

$$t_m = \tau \left(exp \frac{V_1}{2V_0} - 1 \right)$$

4. La dérivée première de $V(t)$ pour t_1 (le fait référence au fait que l'on se place "juste avant t_1") vaut :

$$\dot V(t = t_1^-) = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_1} = \frac{V_0}{\tau}\frac{1}{1+t/\tau}_{t} = \frac{V_0}{\tau+t_1}$$

La dérivée première de $V(t)$ pour t_1^+ (le + fait référence au fait que l'on se place "juste après t_1") vaut :

$$\dot V(t = t_1^+) = -\lambda V_1 e^{-\lambda(t_1 - t_1)} = -\lambda V_1$$

A priori, ces deux valeurs n'ont aucune raison d'être égales : la dérivée de $V(t)$ n'est pas continue en t_1 (c'est d'ailleurs ce que l'on voit sur le graphe : la pente de la fonction n'est pas continue en t_1)

La discontinuité de cette grandeur vaut :

$$\dot V(t=t_1^+) - \dot V(t=t_1^-) = -\lambda V_1 - \frac{V_0}{\tau+t_1}$$

6 Régimes transitoires

1 - On a donc :

$$\dot u(t) = -\omega u_0 sin(\omega t)$$

, donc

$$\dot u(t=0) = 0$$

et

$$\ddot u(t) = -\omega^2 u_0 cos(\omega t)$$

et donc

$$\ddot u(t=0) = -\omega^2 u_0$$

On retrouve le fait que la valeur de la dérivée d'une fonction en un point n'a rien à voir avec la valeur de cette fonction en ce point.

Soit maintenant une tension décrite par la fonction $u(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$. 2 - On a donc :

$u(t = 0) = A$

$\dot u(t) = -\omega Asin(\omega t) + B\omega cos(\omega t)$ et donc : $\dot u(t = 0) = 0 + B\omega$. Sachant que $u(t = 0) = 0 = A$ et $\dot u(t = 0) = \dot u_0 = B\omega$

Ce qui donne : $A = 0$ et $B = \frac{\dot u_0}{\omega}$

Ainsi la fonction recherchée est :

$$u(t) = \frac{\dot u_0}{\omega} sin(\omega t)$$

L'allure de cette fonction est une sinusoïde de valeur initiale nulle.

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(Acos\Omega t + Bsin\Omega t)$

3 - On a :

$u(t=0) = A$

ensuite, on a (il faut faire la dérivée d'une somme de deux produits, ce qui donne quatre termes) :

$$\dot u(t) = -\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}cos\Omega t - A e^{-\frac{t}{\tau}}\Omega sin\Omega t - \frac{B}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}sin\Omega t + Be^{-\frac{t}{\tau}}\Omega cos\Omega t$$

Si on évalue cette fonction en $t = 0$, on a :

$\dot u(t = 0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$.

Sachant que $u(t = 0) = 0 = A$ et $\dot u(t = 0) = \dot u_0 = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$

ce qui donne : $A = 0$ et $B = \frac{\dot u_0}{\Omega}$

La fonction recherchée est donc :

$$u(t) = \frac{\dot u_0}{\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} (sin\, \Omega t)$$

Soit maintenant une tension de la forme : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$.

4 - On a : $u(t = 0) = A + B$ ensuite : $\dot u(t) = -\frac{A}{\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{B}{\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ donc : $\dot u(t=0) = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2}$.

Sachant que $u(t = 0) = 0 = A + B$ et $\dot u(t=0) = \dot u_0 = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2}$

La première équation donne : $B = -A$, qui, réinjectée dans la deuxième donne : $\dot u_0 = -\frac{A}{\tau_1} + \frac{A}{\tau_2}$ ce qui donne : $A = \frac{\dot u_0 \tau_1\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}$ Donc : $B = \frac{\dot u_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$

Donc la fonction étudiée est :

$$u(t) = \frac{\dot u_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$

La fonction est nulle à $t = 0$, puis croissante si $\dot u_0 > 0$, elle atteint un max puis tend vers 0.

7 Lien fonction/dérivée

La vitesse d'un paquebot de masse m lors d'un freinage s'écrit : $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.

1 - On a : $\dot v = -\frac{v_0}{\tau}e^{-t/\tau}$.

On voit que : $\dot v = -\frac{v}{\tau}$

Si cette relation est issue du principe fondamental de la dynamique appliqué au paquebot, on a : $m\dot v = F_{ext}$ en projection, ce qui donne par identification : $F_{ext} = -\frac{mv}{\tau}$

Dans un autre modèle, la vitesse s'écrit : $v(t) = \frac{v_0}{1+\alpha t}$.

2 - On a : $\dot v = -\frac{\alpha v_0}{(1+\alpha t)^2}$. On a donc : $\dot v = -\frac{\alpha v_0}{(1+\alpha t)^2} = -\frac{\alpha v_0^2}{v_0(1+\alpha t)^2} = -\frac{\alpha v^2}{v_0}$ (il manquait le v_0 dans l'énoncé)

On a : $m\dot v = F_{ext} = -\frac{\alpha m v^2}{v_0}$ ce qui donne :

$$F_{ext} = -\frac{\alpha m v^2}{v_0}$$

L'altitude d'un lévitron est donnée par : $z(t)$ = $z_0cos(!t)$

3 - On a : $\dot{z}(t)$ = $!z_0sin(!t)$ puis $\ddot{z}(t)$ = $!^2z_0cos(!t)$ On en $\boxed{\ddot{z} = \;\; !^2z}$ déduit que

8 Fonctions composées

Lors du freinage d'un TGV de masse m, la vitesse $v(t)$ vérifie l'équation :$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = \quad \alpha v^3$

1 - Le terme de gauche est :$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = mv\dot{v}$.

Par identification, on a donc : $mv\dot{v}$ = $\boxed{m\dot{v} = □v^2}$ □v^3 Ce qui donne :

Dans un circuit LC, la charge $q(t)$ du condensateur C vérifie l'équation : $LC\dot{q}^2 + q^2 = cste$.

2 - Si l'on dérive cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d}{dt}(LC\dot{q}^2 + q^2) = \frac{d}{dt}(cste)$$
$$2LC\dot{q}\ddot{q} + 2q\dot{q} = 0$$

ce qui donne l'équation différentielle : $\boxed{LC\ddot{q} + q = 0}$

Soit z l'altitude d'une bille dans un saladier hémisphérique de rayon r_0. On peut montrer par le théorème de

Pythagore que $z = \text{p}r_0^2 \qquad r^2$

3 - On a $\frac{dz}{dr} = \frac{2r}{2\sqrt{r_0^2 \quad r^2}} = \frac{r}{\sqrt{r_0^2 \quad r^2}}$

4 - On a donc : $\boxed{\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dt} = \text{p}\frac{r}{r_0^2 \quad r^2}\frac{dr}{dt}}$

Commentaires : si $r = 0$, on est au fond du saladier et $\dot{z}(r = 0) = 0$, ce qui est logique, car le fond du saladier est horizontal : même si r varie ($\dot{r}$ 6= 0), z ne varie pas.

Si $r = r_0$, on est sur le bord du saladier, donc celui-ci est localement vertical, et donc la moindre variation de r donne une très grande variation de z.

9 Fonctions sinusoïdales

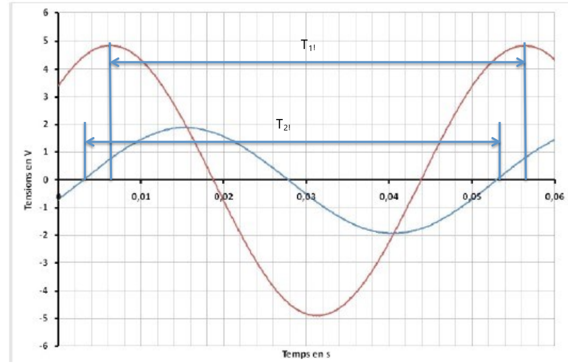
Ecriture d'une fonction 1. $u(t)$ est une sinusoïde de valeur moyenne $u_{moy} = 2V$, d'amplitude $u_0 = 1V$, de période $T = 20ms$ et qui commence à sa valeur moyenne. Pour toutes ces raisons, on peut la mettre sous la forme :

$\boxed{u(t) = u_{moy} + u_0sin \quad 2□t\,T}$

2. Sa valeur moyenne est égale $\boxed{u_{moy}}$ à car la moyenne du sin est nulle. 3. La valeur efficace de sa composante alternative est

$\boxed{u_0/\text{p} \;\; 2 = 1/\,\text{p}2}$

Ecriture de deux fonctions



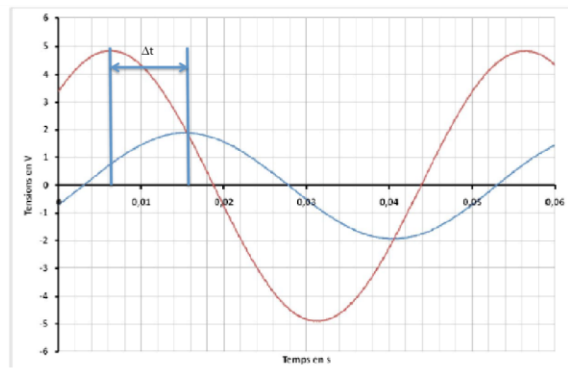
1. Les périodes se lisent sur le graphe : $\boxed{T_1 = 0{,}05s}$ $\boxed{T_2 = 0{,}05s}$ et. Les deux signaux ont même période. La pulsation associée est :

$\boxed{! = \frac{2□}{T} = \frac{2□}{0{,}05} = 40\;□ = 122\;rad.s \quad 1}$

2. Le signal rouge est en avance sur le bleu. Si l'on note t l'avance temporelle de rouge par rapport à bleu, $\boxed{t = 0{,}01s}$ on peut mesurer :.

Et on a donc un déphasage :

$\boxed{\varphi_{SE} = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \frac{2\pi 0{,}01}{0{,}05}rad}$



Il est cohérent d'avoir un déphasage inférieur à au vu $\boxed{□/2}$ des deux courbes, car la courbe bleu atteint son maximum avant que la courbe rouge n'atteigne 0.

3. Les amplitudes se lisent directement sur le graphe $\boxed{u_{20} = 5V}$ pour le rouge et $\boxed{u_{10} = 2V}$ pour le bleu.

Deuxième partie

Développements limités

10 Vérification

Les développements limités corrects sont :

$\frac{1}{1+x} \sim 1 \quad x$; $\frac{1}{a+x} \sim \frac{1}{a} \quad \frac{x}{a^2}$; $\frac{1}{(1+x)^{3/2}} \sim 1 \quad \frac{3x}{2}$

On vérifie notamment sur la deuxième formule que le développement limité ne change pas l'homogénéité d'une formule.

11 Solution approchée

On effectue les développements limités des diverses fonctions : $\cos x \longleftarrow 1$, $(1\ x)^{2} \longleftarrow 1+2x$

donc le développement du terme de gauche donne

$\overline{(1\quad x)^2} \longleftarrow k\,(1+2\ \ x) = \ \ x$ donc

k $\boxed{x = \frac{k}{1\ \ 2k} = \frac{0,1}{0,8} = 0\ ,12}$ $\cos(x)$

On peut comparer cette solution à la solution issue d'une résolution numérique exacte qui est. On a un $\boxed{x = 0{,}13}$ résultat relativement proche : le développement limité est satisfaisant.

12 Pression dans une classe

1. L'argument de l'exponentielle ne doit pas avoir de dimension : H est forcément une longueur, car h/H est sans dimension. Sa valeur numérique est de l'ordre de $8km$. C'est beaucoup plus grand que la hauteur de la classe : l'argument de l'exponentielle reste pratiquement nul sur la hauteur de la classe : on peut considérer la pression comme presque constante sur la hauteur de la classe. on peut déterminer une expression approchée au premier ordre de $P(z)\ \ P_0$ par développement limité :

$P(z) = P_0 e^{\ z/H} \longleftarrow P_0\,1\ \frac{z}{H}$ donc $P(z)\ P_0 \longleftarrow$ $\boxed{P_0\frac{z}{H}}$

2. L'erreur maximale que l'on commet en considérant la pression uniforme dans l'enceinte est de l'ordre de $P_0\frac{z}{H}$ donc $\boxed{\frac{P_0\frac{z}{H}}{P_0} = \frac{z}{H}}$ en valeur relative de ce qui est complètement négligeable.

13 Champ de gravité terrestre

1. Le champ de gravité terrestre est $g(r) = g_0 R_T^2/r^2$. Pour faire le développement limité à l'ordre 1 de ce champ au voisinage de la surface terrestre, on fait apparaître une grandeur petite devant en utilisant le fait que $r\ R_T << R_T$. $g(r)$ $= g_0 r R_{2T2} = (R + g_0 r R_{T2} R_T)_2 = R_{T2}\,1 + g_0 R_r R_{T2} R_{TT}\,2 \longleftarrow$

$\boxed{g(r) \longleftarrow g_0\quad 1\quad 2\frac{r\ \ R_T}{R_T}}$

$g_0 R_T^2\quad 1\qquad 2\frac{r\ R_T}{} = g$

$2\frac{r R}{R_T}$

2. On approxime une fonction en $r^{\ 2}$ par sa fonction tangente. Or vu la courbure de $r^{\ 2}$, sa tangente est sous la courbe : on a donc tendance à sous-estimer la norme de $g(r)$ en en faisant le développement limité à l'ordre 1.

14 Rayonnement d'un corps

En utilisant la formule de Taylor, on a :
$P = S\,(T^4\qquad T_0^4) \longleftarrow 4S\,T_0^3(T\quad T_0)$

$T = T_0 + T\quad T_0 = T_0(1 + \frac{T\ \ T_0}{T_0})$

L'autre méthode consiste à poser : ce

qui donne :

$$S\sigma(T^4\quad T_0^4) = S\sigma(T_0^4(1+\tfrac{T\ \ T_0}{T_0})^4\quad T_0^4)$$
$$\sim S\sigma(T_0^4(1+4\tfrac{T\ \ T_0}{T_0})\quad T_0^4) = S\sigma(T_0^4+4T_0^3(T\quad T_0)\quad T_0^4)$$
$$\boxed{\sim 4S\sigma T_0^3(T\quad T_0)}$$

15 La mission Darwin

1. On a la relation :

$$0 = \frac{GM_S}{d^2} + \frac{GM_T}{(D\quad d)^2} + \Omega^2 d$$

L'expression de la vitesse angulaire donne, si on la réinjecte dans cette équation :

$$0 = \frac{GM_S}{d^2} + \frac{GM_T}{(D\quad d)^2} + \frac{GM_S}{D^3}d$$

qui peut se réécrire :

$$0 = \frac{1}{d^2} + \frac{\alpha}{(D\quad d)^2} + \frac{d}{D^3}$$

puis :

$$0 = \quad 1 + \frac{\alpha x^2}{(1\quad x)^2} + x^3$$

2. On peut simplifier cette équation si $1\ x = " << 1$, elle devient :

$$0 = \quad 1 + \frac{\alpha\,(1\quad\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} + (1\quad\varepsilon)^3$$

qui devient, après développement limité à l'ordre 1 :

$$0 = \quad 1 + \frac{\alpha\,(1)^2}{\varepsilon^2} + (1\quad 3\varepsilon) = \frac{\alpha}{\varepsilon^2} + (\quad 3\varepsilon)$$

$\frac{\alpha}{\varepsilon^2} = 3\varepsilon$

donc $\boxed{\varepsilon = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}}$ donc

ce qui donne numériquement quelque chose de très proche de la solution numérique.

Troisième partie Différentielles

16 Aire d'un disque

On a $A = \pi r^2$ dont la différentielle est. $\boxed{dA = 2\pi r dr}$

On peut interpréter cela en comprenant que $2\pi r$ est le périmètre du cercle et que dA correspond donc à l'aire du bandeau d'épaisseur dr que l'on peut plaquer sur ce périmètre de sorte à augmenter le rayon de dr.

17 Relation de conjugaison

La relation de conjugaison peut se réécrire : $\boxed{x^0 = \frac{fx}{f+x}}$.

Si l'on calcule la différentielle de cette fonction de x en x_0 cela donne :

$$\boxed{dx^0 = \frac{f(f+x_0) \quad fx_0}{(f+x_0)^2}dx = \frac{f^2}{(f+x_0)^2}dx}$$

18 Champ de gravité terrestre

1. La variation infinitésimale dg est donc

$$\boxed{dg = \frac{dg}{dr}dr = \quad g_0\frac{2R_T^2}{r^3}dr}$$

2. Pour $dr = h = 30km$, on a. $\boxed{dg = 10^{\ 3}S.I.}$ Comparée à g_0, cette variation est négligeable : l'approximation $g(r) \longleftarrow g_0$ est une bonne approximation.

19 Dérivées et différentielles On a :

— $f_{10} = ax_{a\ 1}$ et $\boxed{df_1 = ax^{a\ 1}dx}$

— $f_2^0 = b(x+a)^{b\ 1}$ et $\boxed{df_2 = b(x+a)^{b\ 1}dx}$

— $f_3' = ca(ax+b)^{c\ \ 1}$ et $\boxed{df_3 = ca(ax+b)^{c\ 1}dx}$

— $f_4^0 = 2sinxcosx$ et $\boxed{df_4 = 2sinxcosxdx}$

— $f_5^0 = kcoskx$ et $\boxed{df_5 = (kcoskx)dx}$

— $f_6^0 = \quad 2ksinkxcoskx$ et $\boxed{df_6 = \quad 2ksinkxcoskxdx}$

— $f_7' = \frac{a}{x}$ et $\boxed{df_7 = \frac{adx}{x}}$

— $f_8' = \frac{a}{ax+b}$ et $\boxed{df_8 = \frac{adx}{ax+b}}$

— $f_9^0 = 2axexp(ax^2)$ et $\boxed{df_9 = 2axexp(ax^2)dx}$

20 Variations infinitésimales

1. La variation infinitésimale d'énergie dE si la quantité de mouvement passe de p_0 à $p_0 + dp$ à m fixée est : si on la calcule en p_0 $\boxed{dE = \frac{dE}{dp}dp = \frac{2p}{2m}dp = \frac{p_0}{m}dp}$ 2. La variation infinitésimale d'énergie dE si la masse passe de m_0 à m_0+dm à quantité de mouvement p_0 fixée :

$$\boxed{dE = \frac{dE}{dm}dm = \frac{p_0^2}{2m^2}dm = \frac{p_0^2}{2m_0^2}dm}$$

3. On a $p = \sqrt{2mE}$ et donc $\boxed{dp = \frac{dp}{dm}dm = \frac{\sqrt{2E}}{2\sqrt{m_0}}dm}$

Quatrième partie

Nombres complexes

21 Passages

1 - Le module Z de l'impédance $\underline{Z}$ est : $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2}$

Pour le tracé, cf. calculatrice.

2 - L'argument φ de l'impédance est tel que : $tan(\varphi) = \frac{Im(\underline{Z})}{Re(\underline{Z})} = \frac{\omega L}{R}$

Donc : $\boxed{\varphi = tan^{\ 1}(\frac{\omega L}{R})}$

Pour le tracé, c'est l'opposé de la fonction $tan^{\ 1}$ 3 - D'après ce qui précède, on a :

$$\boxed{\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2}e^{jtan^{\ 1}(\frac{\omega L}{R})}}$$

.

4 - La représentation de ce complexe procède du cours de terminale.

On doit trouver :

$$\boxed{Z = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}}$$

et $\boxed{\varphi = tan^{\ 1}(\frac{3}{2})}$

22 Extraction de grandeurs

1 - Le module G de $\underline{H}$ est : $\boxed{G = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}}$. On rappelle que le module d'un quotient est le quotient des modules.

Pour le tracé, cf. calculatrice.

2 - L'argument φ de $\underline{H}$ est l'argument d'un quotient, donc la différence des arguments. Le numérateur est un réel, donc d'argument nul, donc :

6 - Soit un système caractérisé par une grandeur complexe $\underline{Z}$ appelé impédance, qui est de la forme : $\underline{Z} = \frac{j\omega LR}{R+j\omega L} + R$. Une condition sur ω, L et R pour que l'impédance soit strictement réelle est que sa partie imaginaire soit nulle.

Or $\underline{Z} = \frac{j\omega LR(R \quad j\omega L)}{R^2+\omega^2L^2} + R$

dont la partie imaginaire est : $Im(\underline{Z}) = \frac{j\omega LR^2}{R^2+\omega^2L^2} = 0$ si $\boxed{\omega = 0}$

donc $\boxed{\underline{Z} = R}$ dans ce cas.

23 Egalité entre deux complexes

— On a B qui est le module du complexe de droite, donc qui doit être égal au module du complexe de gauche, ce qui est : $\boxed{B = A\sqrt{x^2+y^2}}$

— g est l'argument du complexe de droite, il doit donc être égal à l'argument de celui de gauche, donc : $\boxed{g = tan^{\ 1}(\frac{Ay}{Ax}) = tan^{\ 1}(\frac{y}{x})}$

— Ax est la partie réelle du complexe de gauche, donc $Ax = Bcos(g)$ donc : $\boxed{x = \frac{B}{A}cos(g)}$

— De même Ay est la partie imaginaire du complexe de gauche, donc : $Ay = Bsin(g)$ donc : $\boxed{y = \frac{B}{A}sin(g)}$

$\boxed{Arg(\underline{H}) = Arg(R) \quad Arg(R + j\omega L) = \quad Arg(R + j\omega L) = \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})}$

accessoirement vaut :

3 - Le complexe $\underline{H}$ sous forme géométrique est donc :

$\boxed{\underline{H} = Ge^{j\varphi} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} e^{j\tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})}}$

4 - Sa partie réelle est donc :

$\boxed{Re(\underline{H}) = G\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cos(\tan^{-1}(\frac{\omega L}{R}))}$ qui accessoirement vaut $\frac{R}{R^2+\omega^2L^2}$

et sa partie imaginaire est :

$\boxed{Im(\underline{H}) = G\sin\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \sin(\tan^{-1}(\frac{\omega L}{R}))}$ qui $\frac{R\omega L}{R^2+\omega^2L^2}$

5 - Pour $\underline{H_2} = \frac{j\omega L}{R+j\omega L}$

on a : $\boxed{G_2 = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}}$ et

$\boxed{\varphi_2 = Arg(j\omega L) \quad Arg(R + j\omega L)}$

Donc : $\boxed{\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})}$

Donc :

$\boxed{\underline{H_2} = G_2e^{j\varphi_2} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} e^{j(\frac{\pi}{2} \quad \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R}))}}$

Sa partie réelle est donc :

$Re(\underline{H_2}) = G_2\cos\varphi_2 = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\frac{\pi}{2} \quad \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R}))$

et sa partie imaginaire est :

$Im(\underline{H_2}) = G_2\sin\varphi_2 = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\frac{\pi}{2} \quad \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R}))$

Pour $\underline{H_3} = \frac{R'+j\omega L'}{R+j\omega L}$, on a de même :

$\boxed{G_3 = \frac{\sqrt{R'^2+\omega^2L'^2}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}}$

et $\varphi_3 = Arg(R'+j\omega L') \quad Arg(R+j\omega L)$

Donc : $\boxed{\varphi_3 = \tan^{-1}(\frac{\omega L'}{R'}) \quad \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})}$

Donc :

$\boxed{\underline{H_3} = G_3e^{j\varphi_3} = \frac{\sqrt{R'^2+\omega^2L'^2}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} e^{j(\tan^{-1}(\frac{\omega L'}{R'}) \quad \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R}))}}$

Sa partie réelle est donc : $Re(\underline{H_3}) = G_3\cos\varphi_3 = \frac{\sqrt{R'^2+\omega^2L'^2}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\tan^{-1}(\frac{\omega L'}{R'}) \quad \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R}))$

et sa partie imaginaire est :

$Im(\underline{H_3}) = G_3\sin\varphi_3 = \frac{\sqrt{R'^2+\omega^2L'^2}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\tan^{-1}(\frac{\omega L'}{R'}) \quad \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R}))$

TD : Equations différentielles du premier ordre

Corrigé

Première partie

Analyse et résolution analytique d'équations linéaires

1 Equations différentielles linéaires

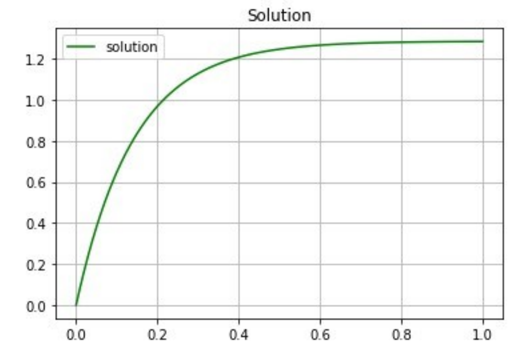
Equation 1

La solution de $y' - 4y = 0$ est de la forme : $y = ke^{4t}$

Avec $y(t = 2) = 9$, cela impose $y(2) = ke^{8} = 9$ donc : $k = 9e^{8}$

donc :

$\boxed{y = 9e^{(4t\ 8)}}$



Equation 2

La solution de $y' + 7y = 9$ est la somme :

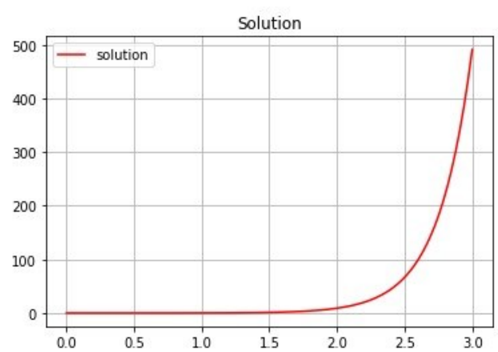
— de la solution particulière, y_P qui est de la même forme que le second membre, qui est une constante, donc on cherche une solution constante, i.e. y_P telle que $y'_P = 0$, ce qui donne l'équation $y_P' + 7y_P = 9$ donc $y_P = 9/7$

— de la solution y_H de l'équation homogène, i.e. $y_H' + 7y_H = 0$, i.e. $y_H = ke^{7t}$

— Donc la solution est : $y = y_P + y_H = 9/7 + ke^{7t}$

— Or $y(t = 0) = 0$, ce qui impose : $y(0) = 0 = 9/7 + k$ donc $k = 9/7$ et finalement :

$\boxed{y = 9/7(1 \quad e^{7t})}$



2 Phase d'accélération d'un TGV, modèle simple

1. L'équation qui régit sa vitesse $v(t)$ est :

$\boxed{m\frac{dv}{dt} = F_0 \quad bv}$

2. Si la vitesse initiale est nulle :

— aux temps courts l'équation est environ $m\frac{dv}{dt} \longleftarrow F_0$, ce qui donne une vitesse qui évolue en $\frac{dv}{dt} \sim \frac{F_0}{m}$, i.e.

$v \sim \frac{F_0}{m}t + cste$ or la constante est nulle, parce que la vitesse est nulle initialement.

— Ensuite, le terme en bv augmente et la vitesse augmente de moins en moins vite jusqu'à atteindre un état d'équilibre dynamique entre les deux termes qui correspond à une vitesse donnée par $m\frac{dv}{dt} = 0 = F_0 \quad bv_{lim}$ i.e. $v_{lim} = \frac{F_0}{b}$ dont les dépendances sont logiques.

— Pour atteindre cette vitesse limite, on écrit que le temps typique est le temps nécessaire pour atteindre v_{lim} en partant de $v(0) = 0$ avec une pente $\frac{F_0}{m}$, i.e.

$\tau = \frac{v_{lim} \quad 0}{\frac{F_0}{m}} = \frac{m}{b}$

Si la vitesse initiale est v_0 :

— aux temps courts l'équation est environ $m\frac{dv}{dt} \sim F_0 bv_0$, ce qui donne une vitesse qui évolue en $\frac{dv}{dt} \longleftarrow \frac{F_0 \quad bv_0}{m}$, i.e. $v \sim \frac{F_0 \quad bv_0}{m}t + cste$ or la vitesse est v_0 initialement, donc $v \sim \frac{F_0 \quad bv_0}{m}t + v_0$.

— Ensuite, le terme en bv augmente et la vitesse augmente de moins en moins vite jusqu'à atteindre un état d'équilibre dynamique entre les deux termes qui correspond à une vitesse donnée par $m\frac{dv}{dt} = 0 = F_0\ bv_{lim}$ i.e. $v_{lim} = \frac{F_0}{b}$ dont les dépendances sont logiques.

— Pour atteindre cette vitesse limite, on écrit que le temps typique est le temps nécessaire pour atteindre v_{lim} en partant de $v(0) = v_0$ avec une pente $\frac{F_0 - bv_0}{m}$,

i.e. $\tau = \frac{v_{lim} - v_0}{\frac{F_0 - bv_0}{m}} = \frac{m}{b}$ i.e. le même temps que précédemment.

3. On peut retrouver ces caractéristiques par une résolution analytique :

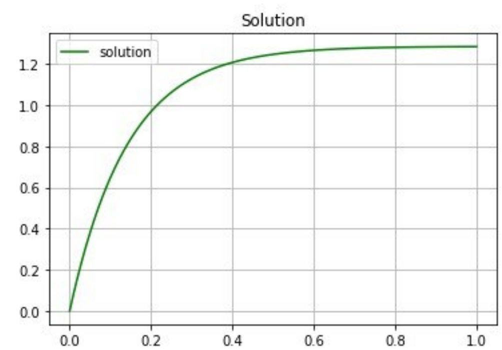
— La solution de $m\frac{dv}{dt} = F_0 - bv$ est la somme de la solution particulière $v_P = F_0/b$ et de la solution de l'équation homogène associée $v_H = ke^{-t/\tau_0}$ avec $\tau_0 = m/b$. On a donc : $v = \frac{F_0}{b} + ke^{-t/\tau'}$

— Si $v(0) = 0$, cela implique $0 = \frac{F_0}{b} + k$ donc $k = -\frac{F_0}{b}$, ce qui donne $v = \frac{F_0}{b}(1 - e^{-t/\tau'})$

— Si $v(0) = v_0$, cela implique $v_0 = \frac{F_0}{b} + k$ donc $k = v_0 - \frac{F_0}{b}$, ce qui donne

$$\boxed{v = \frac{F_0}{b} + \left(v_0 - \frac{F_0}{b}\right)e^{-t/\tau_0}}$$

Toutes ces évolutions sont cohérentes avec les analyses qualitatives précédentes, et notamment avec le fait que le temps typique d'évolution n'est pas une fonction des conditions initiales.



3 Felix

1. Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe descendant $\vec{u_z}$ s'écrit : $m\ddot{z} = mg$

Son intégration donne $\dot{z} = gt$ s'il n'y a pas de vitesse initiale.

Son intégration donne : $z = \frac{gt^2}{2}$ si on note $z = 0$ la position initiale de Félix.

Le temps de chute correspond à $z = h$ i.e.

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

2. La nouvelle équation différentielle vérifiée par la vitesse est

$$\boxed{m\dot{v} = mg - kv}$$

3. La solution de cette équation est la somme de sa solution particulière $v_p = mg/k$ et de sa solution homogène $v_H = e^{-t/\tau}$ où $\tau = m/k$ donc

$v = v_p + e^{-t/\tau}$

sachant que en $t = t_1$, elle doit vérifier $v(t = t_1) = v_1$ donc $v_1 = v_p + e^{-t_1/\tau}$ donc

$$\boxed{v = v_p + (v_1 - v_P)e^{-(t-t_1)/\tau}}$$

La vitesse limite que l'on notera v_1 est égale à la solution particulière.

Le temps typique mis pour y parvenir est le temps τ

4. L'allure de la vitesse au cours de la chute, en prenant $v_1 > v_1$, est une allure de relaxation en exponentielle typique.

4 Extraction de données à partir d'une courbe expérimentale

1. Le signal $u(t)$ est une exponentielle décroissante, qui comme à décroître en un instant t_0, donc elle est de la forme

$$\boxed{u = u_0e^{-(t-t_0)/\tau}}$$

Or t_0 est négatif sur le graphe et il correspond environ à un 1/2 carreau, donc

$$\boxed{t_0 = -0{,}05ms}$$

2. A l'aide du graphe, l'amplitude est 2,5 carreaux donc

$$\boxed{u_0 = 5V}$$

Pour le temps typique de décroissance, on utilise la méthode de la tangente à l'origine, mais il faut faire attention à l'origine des temps.

Sur le graphe, on lit une intersection qui a lieu 1 carreau après le début de la décroissance, donc $\tau = 0{,}1ms$. 3. On a $u(t) = u_0e^{-(t-t_0)/\tau}$ qui est bien solution d'une équation de la forme :

$$\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0 \text{ avec } u(t = t_0) = u_0}$$

5 Démarrage d'une voiture

1. La solution de cette équation est $v(t) = e^{-t/\tau_2}$. Comme la voiture est initialement immobile, $v(t = 0) = 0 =$ ce qui donne :

$$\boxed{v(t) = 0}$$

2. L'équation différentielle dans cet intervalle a pour solution :

$v(t) = v_P + v_H = v_0 + e^{-t/\tau_2}$

On sait ensuite que $v(\tau_1) = 0 = v_0 + e^{\tau_1/\tau_2}$ ce qui donne : $v_0 e^{\tau_1/\tau_2}$ = Et donc :

$$\boxed{v(t) = v_P + v_H = v_0(1 \quad e^{(t\ \tau_1)/\tau_2})}$$

Remarque on aurait pu, sachant que la condition initiale était donnée en τ_1, directement écrire une solution adaptée, qui donne une constante d'intégration plus simple à déterminer et poser directement : $v(t) = v_P + v_H = v_0 + {}_0 e^{(t\ \tau_1)/\tau_2}$

On détermine ensuite la constante d'intégration avec la condition initiale, ce qui donne :

$v(\tau_1) = 0 = v_0 + {}^0$ ce qui donne $\quad v_0 = \quad {}^0$

et on retrouve directement le même résultat que précédemment : $v(t) = v_P + v_H = v_0(1\ e^{(t\ \tau_1)/\tau_2})$

Analyse

— τ_2 correspond au temps typique d'accélération de la voiture
— τ_1 correspond visiblement au temps qu'il a fallu attendre pour que le conducteur décide de démarrer : c'est le temps de réaction du conducteur.

3. La position de M, $x(t)$, est donnée par l'intégration de

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0(1 \quad e^{(t\ \tau_1)/\tau_2})$$

Ce qui donne : $x = v_0(t + \tau_2 e^{(t\ \tau_1)/\tau_2}) + cste$

On détermine la constante en écrivant que $x(t = 0) = 0 = v_0 \tau_2 e^{\tau_1/\tau_2} + cste$ Ce qui donne : $x = v_0(t + \tau_2 e^{(t\ \tau_1)/\tau_2})\quad v_0 \tau_2 e^{\tau_1/\tau_2}$ Donc finalement :

$$\boxed{x = v_0(t + \tau_2\, e^{(t\ \tau_1)/\tau_2} \quad 1\ )}$$

6 Amortissement?

1. On a $x(t) = \quad e^{\alpha t}$.

Si l'on utilise : $x(t = 0) = x_0 =$ ce qui donne :

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{\alpha t}}$$

Pour $t > t_1$. On admet que l'équation différentielle est maintenant de la forme : $\dot{x}\ \alpha x = 0$. On admet que $x(t)$ est une fonction continue.

2. La forme générale de la solution est maintenant : $x(t) = \mu e^{\alpha t}$, mais comme on donne la condition de continuité en t_1, il vaut mieux écrire sous la forme : $x(t) = \mu_0 e^{\alpha(t\ t_1)}$

Si on note $x_1 = x(t_1) = \mu_0$ Donc :$x(t) = x_1 e^{\alpha(t\ t_1)}$

Pour déterminer x_1, on prend la solution dans l'intervalle précédent, et on calcule $x(t_1) = x_0 e^{\alpha t_1}$ Ce qui donne finalement :

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{\alpha(t\ 2t_1)}}$$

3. Si l'on change la date de début, on a : $x(t_0) = x_0$.

On a $x(t) = \quad e^{\alpha t}$ qui vaut mieut écrire : $x(t) = {}_0 e^{\alpha(t\ t_0)}$ Si l'on utilise : $x(t = t_0) = x_0 = {}_0$ ce qui donne :

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{\alpha(t\ t_0)}}$$

La forme générale de la solution est maintenant : $x(t) = \mu e^{\alpha t}$, mais comme on donne la condition de continuité en t_1, il vaut mieux écrire sous la forme : $x(t) = \mu_0 e^{\alpha(t\ t_1)}$

Si on note $x_1 = x(t_1) = \mu_0$ Donc :$x(t) = x_1 e^{\alpha(t\ t_1)}$

Pour déterminer x_1, on prend la solution dans l'intervalle précédent, et on calcule $x(t_1) = x_0 e^{\alpha(t_1\ t_0)}$ Ce qui donne finalement :

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{\alpha(t\ 2t_1+t_0)}}$$

7 Equation sur la vitesse

1. On a une équation différentielle du premier ordre linéaire sur $\dot{x}$, dont la solution est : $\dot{x} = e^{\alpha t}$

Si $\dot{x}(t = 0) = v_0 = \quad$, cela donne :

$$\boxed{\dot{x} = v_0 e^{\alpha t}}$$

On peut en déduire $x(t)$ si on sait en plus que $x(t = 0) = x_0$, en effet : $\dot{x} = v_0 e^{\alpha t}$ donne :

$x = \frac{v_0}{\alpha} e^{\alpha t} + cste$

$x(t = 0) = x_0 = \frac{v_0}{\alpha} + cste$ donc :

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\alpha}(e^{\alpha t} \quad 1) + x_0}$$

2.

On a à présent une solution de la forme :

$\dot{x} = \quad e^{\alpha t}$ ou $\dot{x} = {}_0 e^{\alpha(t\ t_1)}$

Si $\dot{x}(t = t_1) = v_1 = \quad {}_0$, cela donne : $\dot{x} = v_1 e^{\alpha(t\ t_1)}$

On peut en déduire $x(t)$ si on sait en plus que $x(t = t_1) = x_1$, en effet : $\dot{x} = v_1 e^{\alpha(t\ t_1)}$ donne :

$x = \frac{v_1}{\alpha} e^{\alpha(t\ t_1)} + cste$

$x(t = t_1) = x_1 = \frac{v_1}{\alpha} + cste$

donc :

$$\boxed{x = \frac{v_1}{\alpha}(e^{\alpha(t\ t_1)} \quad 1) + x_1}$$

3. Si $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t = t_0) = v_0$, il suffit de changer t en $t\ t_0$ dans tout ce qui précède.

8 Comportement de la membrane d'un axone

1. D'après les graphes, on peut proposer comme expression pour $V(t)$:

$V(t) = V_f + (V_m \quad V_f)e^{\ t/\tau}$

où V_m est la valeur initiale, V_f la valeur finale et τ le temps typique d'évolution de l'exponentielle.

2. L'équation différentielle vérifiée par $V(t)$ dans cette partie est donc forcément de la forme :

$$\tau \frac{dV}{dt} + V = V_f$$

avec $V(t = 0) = V_m$ comme condition initiale.

3. Si la dépolarisation est stoppée à une date $t_S = 3\tau$, la valeur de $V(t)$ est alors : $V(t_S) = V_f + (V_m \ V_f)e^{\ t_S/\tau}$

Si $V(t)$ est alors régie par la même équation que précédemment, mais sans second membre, on a :

$\boxed{\tau \frac{dV}{dt} + V = 0 \quad \text{avec} \quad V(t_s) = \quad V(t_s)}$

On a une solution de la forme $V(t) = e^{\ t/\tau}$. Mais comme on a une condition initiale en t_s, il vaut mieux l'écrire sous la forme : $V(t) = e^{\ (t \ t_s)/\tau}$

Et on utilise alors la condition initiale, ce qui donne :
$V(t_s) =$ Et
donc :

$\boxed{V(t) = V(t_s)e^{\ (t \ t_s)/\tau}}$

Numériquement : A l'aide du graphe, on voit qu'en régime permanent, l'augmentation de ddp vaut : $V_f \ V_m = 10mV$. Le temps typique de mise en place de cette ddp est de l'ordre de $\tau = 1ms$ d'après le graphe.

Deuxième partie

Analyse qualitative et semi-quantitative d'équations non-linéaires

9 Modèle plus élaboré

1. On a l'équation différentielle, d'après le PFD :

$\boxed{m \frac{dv}{dt} = F_0 \quad kv^2}$

2. Si la vitesse initiale est nulle :

— A $t = 0$, la vitesse est nulle pendant un moment, par continuité, donc l'équation différentielle se simplifie en :$m\frac{dv}{dt} \sim F_0$

— Donc $v(t)$ ⇠ $F_0 t/m + constante$

— Or à $t = 0$ la vitesse est nulle, donc la constante d'intégration est nulle (si on écrit l'équation précédente à $t = 0$)

— Donc la vitesse croît linéairement avec une pente F_0/m

— Pour des temps suffisamment longs, la vitesse croît et donc les deux termes de l'équation vont finir par se compenser et on aura une situation d'équilibre dynamique avec une vitesse limite définie par :

$m\frac{dv}{dt})_{v_l} = 0 = F_0 \quad kv_{lim}^2$ donc $v_{lim} = (F_0/k)^{1/2}$

— Le temps typique pour passer de la vitesse nulle à cette vitesse limite est de l'ordre du temps nécessaire pour atteindre v_{lim} avec une pente de F_0/m, c'est-àdire τ ⇠ $v_{lim}/(F_0/m)$ donc τ ⇠ $(F_0/k)^{1/2}/(F_0/m)$

3. Si la vitesse initiale est non nulle :

— On a l'équation différentielle, d'après le PFD : $m\frac{dv}{dt} = F \ kv^2$

— $t = 0$ A , la vitesse est v_0 pendant un moment, par continuité, donc l'équation différentielle se simplifie en :$m\frac{dv}{dt} \sim F_0 \quad kv_0^2$

— Donc $v(t)$ ⇠ $(F_0 \quad kv_0^2)t/m + constante$

— Or à $t = 0$ la vitesse est v_0, donc la constante d'intégration est v_0 (si on écrit l'équation précédente à $t = 0$)

— Donc la vitesse croît linéairement avec une pente $(F_0 \quad kv_0^2)/m$

— Pour des temps suffisamment longs, la vitesse croît et donc les deux termes de l'équation vont finir par se compenser et on aura une situation d'équilibre dynamique avec une vitesse limite définie par :

$m\frac{dv}{dt})_{v_l} = 0 = F_0 \quad kv_{lim}^2$ donc $v_{lim} = (F_0/k)^{1/2}$

Remarque la solution particulière ne dépend pas des conditions initiales

— Le temps typique pour passer de la vitesse v_0 à cette vitesse limite est de l'ordre du temps nécessaire pour atteindre v_{lim} avec une pente de $(F_0 \ kv_0^2)/m$, c'està-dire τ ⇠ $(v_{lim} \ v_0)/((F_0 \ kv_0^2)/m)$ Bonus On peut faire une résolution analytique de l'équation :

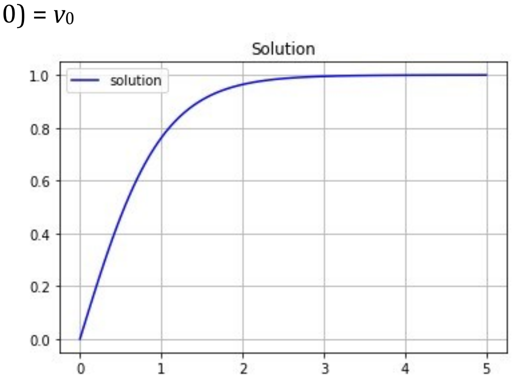
On a l'équation différentielle, d'après le PFD :$m\frac{dv}{dt} = F_0 \quad kv^2$

— On sépare les variables et on met l'équation sous la forme :$m\frac{dv}{F_0 \quad kv^2} = dt$

— que l'on peut réécrire sous la forme : $\frac{dX}{1 \quad X^2} = Edt$ — On sait de plus que $\int \frac{dX}{1 \quad X^2} = \frac{1}{2}ln\frac{1+X}{1 \quad X}$

On calcule cette primitive entre $X(t = 0)$ et $X(t)$: — si on est dans le cas où $v(t = 0) = 0$, on a : $X(t = 0) = 0$ donc : $\frac{1}{2}ln\frac{1+X}{1 \quad X} = Et$

— sinon, il faut calculer $X(t = 0)$ sachant que $v(t = 0) = v_0$



10 Base Jump et C_x

1. On écrit que la vitesse limite correspond à la situation de compoensation des deux forces qui s'exercent sur l'homme : le poids et la force de frottement, ce qui donne :

$$0 = C_x S \rho_{air} \frac{v_{lim}^2}{2} - mg$$

$$\boxed{C_x = \frac{2mg}{S \rho_{air} v_{lim}^2}}$$

Donc

Numériquement, on a : $C_x = \frac{2mg}{S\rho_{air}v_{lim}^2} = \frac{2.80.10^1}{1.1.60^2} = \frac{1,6.10^3}{3,6.10^3} \sim 0,3$, ce qui est très proche des valeurs typiques de C_x (c'est le C_x d'une sphère)

2. Le temps mis pour atteindre sa vitesse limite est le temps caractéristique qui intervient dans l'équation différentielle : $m\frac{dv}{dt} = -C_x S\rho_{air}\frac{v^2}{2} + mg$

Si l'homme part avec une vitesse initiale nulle, l'accélération initiale est $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = g$

Le temps typique est le temps mis pour passer d'une vitesse nulle à sa vitesse limite avec l'accélération initiale, ce qui donne :

$$\boxed{\tau = \frac{v_{lim} - 0}{g} = \frac{\sqrt{\frac{2mg}{C_x S \rho_{air}}}}{g} = \sqrt{\frac{2m}{C_x S g \rho_{air}}}}$$

$$\boxed{\text{Numériquement : } \tau = \frac{v_{lim} - 0}{g} = \frac{60 - 0}{10} = 6\ s}$$

11 Modèle d'atterrissage sur Mars

1. Pendant l'atterrissage, l'altitude décroît, donc les courbes sont parcourues de la droite vers la gauche. Pour toutes les sondes, la vitesse décroît aux alentours de $z_0 = 50km$. On peut supposer Identifier l'altitude z_0 en deça de laquelle on ne peut pas négliger les frottements de l'air.

2. La dimension du terme b est telle que la forme précédente soit homogène à une force : $N = kg.m.s^{-2} = [b]m^3.s^{-3}$ donc $[b] = kg.m^{-2}s$. b est un facteur lié à l'intensité des frottements à une vitesse donnée, il dépend de la surface transverse de la sonde, de la masse volumique de l'atmosphère :

— avoir un grand b signifie subir beaucoup de frottements

— au contraire avoir un petit b signifie subir peu de frottements

3. L'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ est donc :

$$\boxed{m\dot{v} = mg_m - bv^3}$$

La condition initiale sur la vitesse est $v(t=0) = v_0$

4. Pour prévoir le comportement et l'allure de $v(t)$, on analyse l'équation différentielle aux temps courts et aux temps longs.

Aux temps courts, l'équation peut se simplifier en :

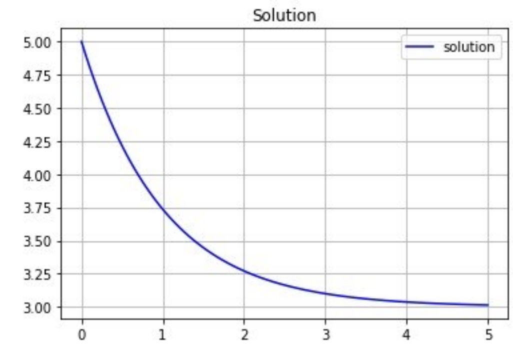
$m\dot{v}(t \longrightarrow 0) \longrightarrow mg_m - bv_0^3$. Ce qui donne : $\dot{v} \sim g - \frac{bv_0^3}{m}$ et $v \sim \left(g - \frac{bv_0^3}{m}\right)t$: on a une évolution linéaire de la vitesse avec une pente $g_m - \frac{bv_0^3}{m}$

Aux temps longs, la vitesse est importante, la force de frottement non-négligeable et comme l'équation est une équation de relaxation, la solution va tendre vers une valeur limite qui correspond à l'annulation de l'accélération :

$m\dot{v} = mg_m - bv_{lim}^3 \longrightarrow 0$ donc $v_{lim} = \left(\frac{mg_m}{b}\right)^{1/3}$

Entretemps, la vitesse a crû jusqu'à cette vitesse limite et la force de frottement aussi, jusqu'au moment d'équilibre dynamique où elle est parvenue à équilibrer le poids. Le temps typique τ_0 d'évolution correspond au temps mis par la vitesse pour passer de v_0 à v_{lim} avec une pente typique de l'ordre de $g_m - \frac{bv_0^3}{m}$, donc $\tau' = \frac{v_{lim} - v_0}{g_m - \frac{bv_0^3}{m}}$.

L'allure du graphe est donc :



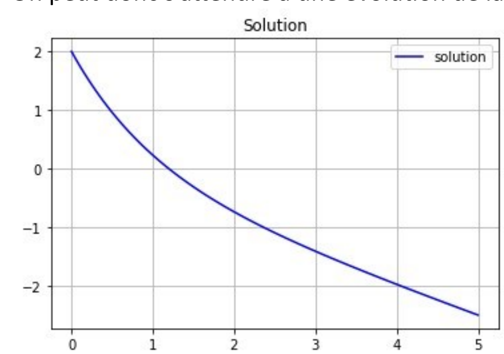
5. Il faut simplement prendre garde que la vitesse est dirigée vers le bas et que ce que l'on a noté $v(t)$ est la norme de la vitesse. Ainsi, la relation mathématique exacte est $\frac{dz}{dt} = v_z = -v$. Donc $z(t)$ est l'opposé de la primitive de $v(t)$.

Ainsi, à la fin de l'évolution $v(t)$ est constante et égale à sa valeur limite, v_l et donc l'altitude décroît de manière affine : $z(t) = -v_l t + cste$

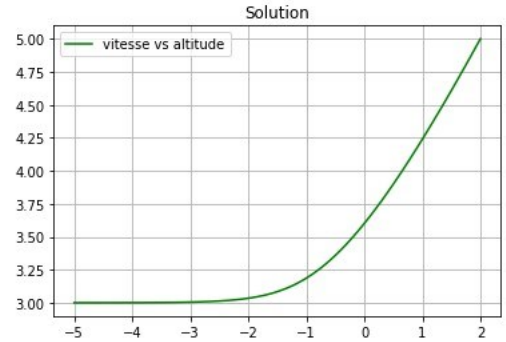
Au début de l'évolution, $v(t)$ décroît et donc la diminution de $z(t)$, initialement rapide, décroît pour atteindre le régime affine vu précédemment.

Enfin, $z(t = 0) = z_0$.

On peut donc s'attendre à une évolution de la forme :



On peut donc prévoir pour $v(z)$:



Ce qui est en accord avec le graphe étudié.

12 Analyse d'un système stable

1. On a comme condition initiale $h(t_C) = h_C$.

A partir de cette date, h va croître avec une pente initiale donnée par : $\dot{h}(t_C) = a \quad kh^4_C$

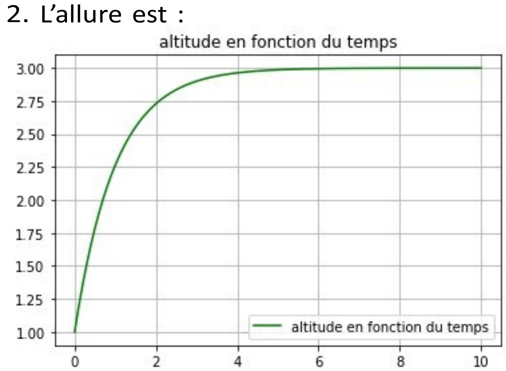
jusqu'à une valeur asymptotique qui correspond à l'annulation de la dérivée, i.e.

$\dot{h}_{lim} = 0 = a \quad kh_{lim}^4$ donc on a : $h_{lim} = (a/k)^{1/4}$

Le temps typique d'évolution est donc le temps nécessaire à passer de h_C à $h_{lim} = (a/k)^{1/4}$ avec une pente de l'ordre de $\dot{h}(t_C) = a \quad kh_C^4$ du coup, il est donné par :

$$\boxed{\tau = \frac{(a/k)^{1/4} \quad h_C}{a \quad kh_C^4}}$$

2. L'allure est :



13 Tribologie

1. L'équation différentielle d'évolution de la vitesse $\dot{x}$ est : $m\frac{d\dot{x}}{dt} = mgsin\alpha \quad \gamma_n \dot{x}^n$

2. La vitesse limite atteinte correspond à l'annulation de la dérivée de la vitesse, donc à :

$0 = mgsin\alpha \quad \gamma_n \dot{x}_l^n$ donc à :

$$\boxed{\dot{x}_l = v_l = \left(\frac{mgsin\alpha}{\gamma_n}\right)^{1/n}}$$

La durée d'évolution est donnée par le raisonnement classique :

A partir de $t = 0$, v va décroître avec une pente initiale donnée par : $\dot{v}(0) = gsin\alpha \quad \frac{\gamma_n}{m}v_0^n$ jusqu'à une valeur asymptotique v_l

Le temps typique d'évolution est donc le temps nécessaire à passer de v_0 à v_l avec une pente de l'ordre de $\dot{v}(0)$ du coup, il est donné par :

$$\boxed{\tau = \frac{v_l \quad v_0}{gsin\alpha \quad \frac{\gamma_n}{m}v_0^n}}$$

3. La vitesse asymptotique est la valeur de la partie horizontale de la courbe.

4. L'allure de la trajectoire $(x; \dot{x})$ correspondant à $m = 3kg$ et à la condition initiale $x = 500m$ et $\dot{x} = 0m.s^{-1}$ est la même que celle des autres courbes, mais elle part d'une vitesse $v(t = 0) = 0$ et elle a la même limite horizontale.

Troisième partie

Résolution analytique d'équations non-linéaires

14 Vitesse d'une réaction chimique

1. Pour déterminer $x(t)$, on sépare d'abord les variables : Puis,

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \quad kdt$ on peut intégrer, ce qui donne :

$2\sqrt{x} = \quad kt + cste$

Pour déterminer la constante d'intégration, on utilise la condition initiale : $x(t = 0) = x_0$.

En $t = 0$, l'équation précédente donne ainsi : $2\sqrt{x_0} = \quad k0 + cste$ donc : $2\sqrt{x_0} = cste$

Ce qui donne : $2\sqrt{x} = \quad kt + 2\sqrt{x_0}$

Donc :

$$\boxed{x = \left(\frac{kt}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2 = x_0\left(1 \quad \frac{kt}{2\sqrt{x_0}}\right)^2}$$

Remarque On aurait pu, à l'étape $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \quad kdt$, identifier directement les intégrales en bornes correspondantes et pas seulement les primitives, ce qui aurait donné :

$\int_{x'=x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{x'}} = \quad k\int_{t'=0}^{t} dt'$ et donc : $2\sqrt{x} \quad 2\sqrt{x_0} = \quad kt$, ce qui est bien équivalent à l'équation intégrée.

2. Le temps de demi-réaction, $\tau_{1/2}$, est tel que $x(\tau_{1/2}) = x_0/2$.

On a ainsi : $x(\tau_{1/2}) = x_0 \quad 1 \quad \frac{k\tau_{1/2}}{2\sqrt{x_0}} \quad = x_0/2$ ⌘²

Ce qui donne :

$\left(1 \quad \frac{k\tau_{1/2}}{2\sqrt{x_0}}\right)^2 = 1/2$, dont l'inversion permet de déterminer $\tau_{1/2}$.

3. Si $\frac{dx}{dt} = \quad kx^{3/2}$, on procède de même :

Pour déterminer $x(t)$, on sépare d'abord les variables :
$\frac{dx}{x^{3/2}} = \quad kdt$

Puis, on peut intégrer, ce qui donne : $2x^{\ 1/2}$
$= \quad kt + cste$

Pour déterminer la constante d'intégration, on utilise la condition initiale : $x(t = 0) = x_0$.

En $t = 0$, l'équation précédente donne ainsi : $2x_0^{\ 1/2} = k0 + cste$ donc : $2x_0^{\ 1/2} = cste$ Ce qui donne : $\frac{2}{\sqrt{x}} = \quad kt \quad \frac{2}{\sqrt{x_0}}$

Donc :

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{x_0}} \quad \frac{2}{\sqrt{x}} = \quad kt}$$

dont l'inversion permet de déterminer $x(t)$.

Remarque On aurait pu, à l'étape $\frac{dx}{x^{3/2}} = \quad kdt$, identifier directement les intégrales en bornes correspondantes et pas seulement les primitives, ce qui aurait donné : $\int_{x'=x_0}^{x} \frac{dx'}{x'^{3/2}} = \quad k\int_{t'=0}^{t} dt'$ et donc : $\frac{2}{\sqrt{x_0}} \quad \frac{2}{\sqrt{x}} = \quad kt$, ce qui est bien équivalent à l'équation intégrée.

2. Le temps de demi-réaction, $\tau_{1/2}$, est tel que $x(\tau_{1/2}) = x_0/2$. On a ainsi :
$\frac{2}{\sqrt{x_0}} \quad \frac{2}{\sqrt{x_0/2}} = \quad k\tau_{1/2}$ dont l'inversion permet de déterminer $\tau_{1/2}$.

15 Système instable?

1. Pour déterminer $x(t)$, on sépare d'abord les variables :
$\frac{dx}{x^2} = kdt$

Puis, on peut identifier directement les intégrales en bornes correspondantes :
$\int_{x'=x_0}^{x} \frac{dx'}{x'^2} = k\int_{t'=0}^{t} dt'$

et donc : $\frac{1}{x_0} \quad \frac{1}{x} = kt$, dont l'inversion donne :

$$\boxed{x = \frac{1}{\frac{1}{x_0} \quad kt} = \frac{x_0}{1 \quad x_0 kt}}$$

2. $x(t)$ est donc une fonction qui diverge et le système n'est donc pas stable en x_0. Par analyse de la solution ou de l'équation, on peut construire, puisque $x = \frac{x_0}{1 \quad x_0 kt}$, cela veut dire que $x_0 kt$ est sans dimension, on peut donc proposer le temps :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{x_0 k}}$$

Il correspond ici au temps pour atteindre l'infini.

16 Evolution d'une étoile double

1. Pour résoudre, on sépare les variables :
$R^3 dR = \quad kdt$

Pour on identifie les intégrales à bornes correspondantes :
$\int_{R'=R_0}^{R} R'^3 dR' = \quad k\int_{t'=0}^{t} dt'$

Ce qui donne : $\frac{R^4}{4} \quad \frac{R_0^4}{4} = \quad kt$

Ce qui donne : $R = \left(R_0^4 \quad 4kt\right)^{1/4} = R_0\left(1 \quad \frac{4kt}{R_0^4}\right)^{1/4}$

On a donc une trajectoire spirale. 2. Le temps $\tau_{1/2}$, tel que $R(\tau_{1/2}) = R_0/2$ est donné par :

$$\boxed{R(\tau_{1/2}) = \quad R_0/2 = \quad R_0\left(1 \quad \frac{4k\tau_{1/2}}{R_0^4}\right)^{1/4}}$$

17 Freinage et accélération

1. On a l'équation différentielle, d'après le PFD :

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = F_0 \quad kv^2}$$

Si la vitesse initiale est nulle :

— A $t = 0$, la vitesse est nulle pendant un moment, par continuité, donc l'équation différentielle se simplifie en : $m\frac{dv}{dt} \sim F_0$

— Donc $v(t)$ ⇠la vitesse est nulle, donc la constante d'in- $F_0 t/m + constante$

— Or à $t = 0$
tégration est nulle (si on écrit l'équation précédente à $t = 0$)

— Donc la vitesse croît linéairement avec une pente F_0/m

— Pour des temps suffisamment longs, la vitesse croît et donc les deux termes de l'équation vont finir par se compenser et on aura une situation d'équilibre dynamique avec une vitesse limite définie par : $m\frac{dv}{dt})_{v_l} = 0 = F_0 \quad kv_{lim}^2$ donc $v_{lim} = (F_0/k)^{1/2}$

— Le temps typique pour passer de la vitesse nulle à cette vitesse limite est de l'ordre du temps nécessaire pour atteindre v_{lim} avec une pente de F_0/m, c'est-àdire τ ⇠ $v_{lim}/(F_0/m)$ donc τ ⇠ $(F_0/k)^{1/2}/(F_0/m)$ 2. Pour des temps suffisamment longs, la vitesse croît et donc les deux termes de l'équation vont finir par se compenser et on aura une situation d'équilibre dynamique avec une vitesse limite définie par : $m\frac{dv}{dt})_{v_l} = 0 = F_0 \ kv_{lim}^2$ donc $v_{lim} = (F_0/k)^{1/2}$

— Le temps typique pour passer de la vitesse nulle à cette vitesse limite est de l'ordre du temps nécessaire pour atteindre v_{lim} avec une pente de F_0/m, c'est-àdire τ ⇠ $v_{lim}/(F_0/m)$ donc τ ⇠ $(F_0/k)^{1/2}/(F_0/m)$

3.

On peut faire une résolution analytique de l'équation : On a l'équation différentielle, d'après le PFD : $m\frac{dv}{dt} = F_0 \quad kv^2$

— On sépare les variables et on met l'équation sous la forme : $m\frac{dv}{F_0 \quad kv^2} = dt$

— que l'on peut réécrire sous la forme : $\frac{dX}{1 \quad X^2} = Edt$ — On sait de plus que $\int \frac{dX}{1 \quad X^2} = \frac{1}{2}ln\frac{1+X}{1 \quad X}$

On calcule cette primitive entre $X(t = 0)$ et $X(t)$: — si on est dans le cas où $v(t = 0) = 0$, on a : $X(t = 0) = 0$ donc : $\frac{1}{2}ln\frac{1+X}{1 \quad X} = Et$

— sinon, il faut calculer $X(t = 0)$ sachant que $v(t =$

$0) = v_0$

4. On peut en déduire l'expression de :

$$\boxed{v(t) = v_{lim} tanh(Et)}$$

5. On peut en déduire l'équation horaire $x(t)$ car : $v = \frac{dx}{dt}$ donc :

$dx = vdt = v_{lim} tanh(Et)dt$

Donc : $x = \frac{v_{lim}}{E} lncosh(Et) + cste$ sachant que pour $t = 0$, $x(0) = 0$, la constante est nulle, donc :

$$\boxed{x = \frac{v_{lim}}{E} lncosh(Et)}$$

TD : géométrie et calculs vectoriels

Corrigé

1 ... you'll have to fight

1 - On utilise le triangle rectangle, ce qui donne : $d = x.cos$

2 - On utilise là-encore le triangle rectangle : $d = y.sin$

$_1 = \frac{}{cos\alpha}$

4 - On a : $h_1 = x.tan\alpha$

5 - On a : $h_2 = y \quad h_1 = y \quad xtan\alpha.$

6 - Donc $d_2 = h_2 sin\alpha = ysin\alpha \quad xtan\alpha sin\alpha$

7 - Donc $d = d_1 + d_2 = \frac{x}{cos\alpha} + ysin\alpha \quad x\frac{sin^2\alpha}{cos\alpha} = xcos\alpha + \quad \alpha$

3 - On a : $d \quad ^x$

$ysin$

8 - Le vecteur unitaire $pcos^2$ $+!usin_r = ^2 cos = 1 !u_x + sin!u_y$ qui est bien de norme :

9 - On a : $!u_r.!OM = xcos + ysin = d$

2 Calcul de longueur

Un anneau P est astreint à se déplacer sur un demicercle de centre O, de rayon a. $(O_x, OM) = \checkmark$. On considère un ressort attaché par une extrémité en O_0 point situé au-dessus de O, à une distance a et à l'autre extrémité en P. On note $u!_x$ le vecteur unitaire descendant et on utilise la base $(!e_r, !e_\checkmark)$ orthonormée telle que $!e_r$ fait un angle $\checkmark$ avec $!u_x$. On note $!u_y$ le vecteur horizontal unitaire vers la droite du schéma.

1. On peut procéder de plusieurs manières : la première consiste à écrire la relation d'Al-Kashi :

$$O'P = (a^2 + a^2 + 2a^2cos\theta)^{1/2} = a\sqrt{2}(1 + cos\theta)^{1/2} = 2acos\frac{\theta}{2}$$

La deuxième consiste à décomposer le vecteur $!O_0P$:

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + OP$$
$$\text{Or } \overrightarrow{O'O} = a\overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{e_r} \quad !$$

Or, si l'on projette $!e_r$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, on obtient : $!e_r = cos\checkmark!u_x + sin\checkmark!u_y$

Ainsi, on a : $!O^0P = !O^0O + !OP = a!u_x + a(cos\checkmark!u_x + sin\checkmark u!_y)$

Qui peut s'écrire : $!O^0P = a(1 + cos\checkmark)!u_x + asin\checkmark!u_y$ dont la norme vaut : $O^0P = (a^2(1 + cos\checkmark)^2 + a^2sin^2\checkmark)^{1/2}$ qui vaut bien :

$$O'P = (a^2 + a^2 + 2a^2cos\theta)^{1/2} = a\sqrt{2}(1 + cos\theta)^{1/2} = 2acos\frac{\theta}{2}$$

On pourrait aussi reprendre

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + OP$$
$$\text{Or } \overrightarrow{O'O} = a\overrightarrow{u_x} \quad !$$

$OP! = a!e_r$ et décomposer $u!_x$ dans la base $(!e_r, !e_\checkmark)$ ce qui donenrait à la fin le même résultat. 2 - On peut vérifier simplement qu'en $\checkmark = 0, /2$ et la valeur de O_0P est cohérente.

3 Gravitation

1. On procède de la même manière : la première consiste à écrire la relation d'Al-Kashi : $PT = (d^2 + r^2 + 2drcos\checkmark)^{1/2}$

La deuxième consiste à décomposer le vecteur $PT!$:

$$PT! = PM! + MT!$$

$\text{Or } \overrightarrow{PM} = du_x$!

$\overrightarrow{MT} \quad \rightarrow$

$= re_r$

Or, si l'on projette e_r ! dans la base $(u!_x, u!_y)$, on obtient :

$\theta\rightarrow \quad sin\theta\rightarrow$

$!e_r = cos\ u_x + \quad u_y$

Ainsi, on a : $PT! = PM! + MT! = du!_x + r(cos\checkmark!u_x + sin\checkmark u!_y)$

Qui peut s'écrire : $PT! = (d + rcos\checkmark)u!_x + rsin\checkmark u!_y$ dont la norme vaut : $PT = ((d + rcos\checkmark)^2 + r^2sin^2\checkmark)^{1/2}$ qui vaut bien : $PT = (d^2 + r^2 + 2drcos\checkmark)^{1/2}$

2. L'expression pour des valeurs pertinentes de $\checkmark = 0, /2,$

3. La norme de la force de gravitation exercée par P sur T est d'après ce qui précède :

$$F_G = G\frac{Mm}{PT^2} = G\frac{Mm}{d^2 + r^2 + 2drcos\theta}$$

4 Enroulement d'un fil

1. Schéma.

2. On a : $L = L_0 \quad R\checkmark$.
3. Géométriquement, on a : $z(I) = \quad R + R\cos\checkmark$.
4. De même : $z(M) = z(I) \quad L.\sin\checkmark = R + R\cos\checkmark$

$(L_0 \quad R\checkmark)\sin\checkmark$

5 Forçage d'un astéroïde par une planète

1. Schéma.
2. La distance d_{MM_P} entre m et M_P s'écrit à l'aide d'Al-Kashi :

$d_{MMP} = (R_{F}2 + r_{P}2 \quad 2R_{F}r_{P}cos\ )_{1/2}$.

La norme de la force de gravitation exercée par la planète sur l'astéroïde est donc :

$$F_\theta = \frac{GM_F m}{R_F^2 + r_P^2 \quad 2R_F r_P cos\delta}$$

6 Homme sur une échelle

Par la relation de Chasles, on a :d 1. L'angle OGB est :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} \qquad \widehat{OGB} = \pi \quad 2(\tfrac{\pi}{2} \quad \theta) = 2\theta$$

$$x_G = L\cos\theta$$
$$y_G = L\sin\theta$$
$$x_{GH} = \quad \frac{L}{2}\cos\theta$$
$$y_{GH} = \frac{L}{2}\sin\theta$$

Ce qui donne :

$$\boxed{x_H = \frac{L}{2}\cos\checkmark \qquad y_H = \frac{3L}{2}\sin\checkmark}$$

2. On peut vérifier comme d'habitude qu'en $\checkmark = 0$ et ⌧/2, tout est bien cohérent.

7 Piston dans un moteur

On sait que le triangle est rectangle, donc l'angle au niveau du piston est forcément : $\frac{\pi}{2} \quad \theta$ Ce qui implique que :

$$\boxed{x = b\cos(\tfrac{⌧}{2} \quad \checkmark) + L\cos\checkmark = b\sin\checkmark + L\cos\checkmark}$$

2. Si L ⌧ b, alors l'expression précédente devient :

$$\boxed{x \quad \longleftarrow b\sin\checkmark}$$

Le mouvement du piston est harmonique.

3. La vitesse instantanée $v(t)$ du piston est $v(t) = \frac{dx}{dt}$ en faisant l'approximation précédente :

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = b\dot{\checkmark}\cos\checkmark}$$

et sans faire l'approximation :

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = b\dot{\checkmark}\cos\checkmark \quad L\dot{\checkmark}\sin\checkmark}$$

8 Projection de forces

1. Dans la base $(\overrightarrow{u_x}', \overrightarrow{u_y}')$, on a :

Dans la base $(!u_x, !u_y)$, on a :

$!P = P!u_y$
$!T = Tcos⌧!u_x Tsin⌧!u_y$
$!N = Nsin⌧!u_x + Ncos⌧!u_y$

2. On a :

$$\boxed{\overset{!}{u}_x{}^0 = \cos⌧\overset{!}{u}_x \quad \sin⌧\overset{!}{u}_y \text{ et } \overset{!}{u}_y{}^0 = \sin⌧\overset{!}{u}_x + \cos⌧\overset{!}{u}_y}$$

Inversement, on a :

$$\boxed{\overset{!}{u}_x = \cos⌧\overset{!}{u}_x{}^0 + \sin⌧\overset{!}{u}_y{}^0 \text{ et } \overset{!}{u}_y = \quad \sin⌧\overset{!}{u}_x{}^0 + \cos⌧\overset{!}{u}_y{}^0}$$

3. On a : $P + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} = T\overrightarrow{u_x}' + N\overrightarrow{u_y}' + Psin\alpha\overrightarrow{u_x}'$!

$Pcos⌧!u_y{}^0 = (T + Psin⌧)!u_x{}^0 + (N\ Pcos⌧)!u_y{}^0$ dans la base $(!u_{x0}, !u_{y0})$.

Pour exprimer $!P\ !T$, il faut d'abord le projeter sur une base orthonormée, par exemple dans la base $(!u_x{}^0, !u_y{}^0)$:

$!P \quad !T = \quad T!u_x{}^0 + Psin⌧!u_x{}^0 \quad Pcos⌧!u_y{}^0 =$

$(\ T + Psin⌧)!u_x{}^0 + (\ Pcos⌧)!u_y{}^0$ Ce qui donne une norme : q

$$\boxed{!P\ !T = \sqrt{(\ T + Psin⌧)^2 + (\ Pcos⌧)^2}}$$

4. Pour exprimer $!P\ .!v$, on projette ces deux vecteurs sur la base $(\overrightarrow{u_x}', \overrightarrow{u_y}')$ et on obtient : $P = Psin\alpha\overrightarrow{u_x}'$! $Pcos\alpha\overrightarrow{u_y}'$ et $\overrightarrow{v} = vcos\beta\overrightarrow{u_x}' + vsin\beta\overrightarrow{u_y}'$. Donc :

$$\boxed{!P\ .!v = Pvcos\ sin⌧\ Pvsin\ \ cos⌧}$$

9 Produit scalaire

1. On a :

$$\boxed{!u = cos⌧!u_x + sin⌧!u_y}$$

2. On a :

$$\boxed{!v = cos\ !u_y \qquad sin\ !u_x}$$

3. A l'aide de ces deux expressions, on a :

$$\boxed{!u\ .!v = !u = \quad sin\ cos⌧ + sin⌧cos \quad = sin(\quad ⌧)}$$

Ce qui est logique, car l'angle entre ces deux vecteurs unitaires est $\theta = \beta \quad \alpha + \frac{\pi}{2}$ et le produit scalaire de ces deux vecteurs unitaires vaut :

$cos✓ = sin(✓ + ⍰/2) = sin(\quad ⍰)$

4 - On a :

$!u_r = cos✓!u_x + sin✓!u_y$

5 - On a :

$\vec{T} = T\vec{u_x}^{0}, \vec{N} = N\vec{u_y}^{0}$ et $\vec{P} = Psin ⍰\vec{u_x}^{0} \quad Pcos ⍰\vec{u_y}^{0}$

Inversement, on a donc :
$!u_x = cos✓!u_r \; sin✓!u_✓$ De même,

$!u_y = cos✓!u_✓ + sin✓!u_r$

7 - Les normes de ces deux vecteurs valent :

$k!u_xk = p\overline{cos^2✓ + (\; sin✓)^2} = 1$

$!u_y = p\overline{cos^2✓ + sin^2✓} = 1$

k k

8 - On a :

$!w = 2cos✓!u_r + sin✓!u_✓$ et $!u_r = cos✓!u_x + sin✓!u_y$ et

$!u_✓ = cos✓!u_y \quad sin✓u!_x$ donc

$!w = 2cos✓(cos✓!u_x + \quad {}^{y} \quad {}^{y}_{u_x} \quad sin✓!u\;)$
$+ sin✓(cos✓!u \; sin✓!u_x)$ Si l'on ne garde que les composantes selon !, on a :

$!w.!u_x = 2cos^2✓ \quad sin^2✓$

Si l'on décompose $!u_x = cos✓!u_r \, sin✓!u_✓$, alors : $!w.!u_x =$

$(2cos✓!u_r + sin✓u!_✓).(cos✓u!_r \, sin✓u!_✓)$

Et on a de même :

$\vec{w}.\vec{u_x} = 2\;cos^2✓ \quad sin^2✓$

9 - La norme du vecteur $!w$ est : k k p p

$!w = \overline{4cos^2✓ + sin^2✓} = \overline{3cos^2✓ + 1}$

10 Construction de vecteurs

1. Exprimons les deux vecteurs $!e_r$ et $!e_✓$ dans la base

$(!u_x, !u_y)$:

$!e_r = cos✓!u_x + sin✓!u_y$ et $!e_✓ = \quad sin✓u!_x + cos✓u!_y$

2. On a $\overrightarrow{O'O} = a\overrightarrow{u_x}$!. De même $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{e_r}$.

$a\left(cos\theta\overrightarrow{e_r} \quad sin\theta\overrightarrow{e_\theta}\right) + a\overrightarrow{e_r}$ ce qui donne finalement :

3. Donc $O^0P = !O^0O + OP = a!u_x + a!e_r =$

$O^0P = O^0O + OP = au_x + ae_r = a(cos✓ + 1)!e_r \, asin✓!e_✓$

4. La norme de $!O_0P$ est donc :

$\vec{u}_✓ = cos\vec{✓u_y} \quad sin\vec{✓u_x}$

6 -

$$\left|\overrightarrow{O'P}\right| = \sqrt{\left(a\left(cos\theta+1\right)\right)^2 + \left(asin\theta\right)^2}$$

5. Le vecteur unitaire $\dfrac{\overrightarrow{O'P}}{\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|}$ est donc donné par :

$\vec{t} = p\dfrac{a(cos✓+1)\,\vec{e_r} \quad asin✓\vec{e_✓}}{(a(cos✓+1))^2 + (asin✓)^2} = cos\frac{✓}{2}\vec{e_r} \quad sin\frac{✓}{2}\vec{e_✓}$

ce qui est logique car la direction de O_0P fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec $!e_r$

On vérifie simplement que ce vecteur est bien de norme 1 :

$$\left|\vec{t}\right| = \sqrt{cos^2\frac{\theta}{2} + sin^2\frac{\theta}{2}} = 1$$

6. Le vecteur unitaire normal à ce vecteur est

$$\vec{n} = cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_r} \quad sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_\theta} = sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e_r} \quad cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e_\theta}$$

11 Al-Kashi

12 Gravitation

Cf. exercice qui porte le même titre dans lequel une des corrections proposées utilise la relation de Chasles.

13 Variations d'un vecteur

1. On a :

$!u_r = cos✓!u_x + sin✓!u_y$

2. On a :

$!u_✓ = cos✓!u_y \quad sin✓!u_x$

3. Représentation.
4. Si l'on dérive l'expression :

$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y$

$\frac{d\vec{u}}{d\theta} \quad \sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y$

On voit directement que :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$$

De même que :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \quad \sin\theta\,\vec{u}_x \quad \cos\theta\,\vec{u}_y = \quad \vec{u}_r$$

! !, on a :

$_r =$

5. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\dot{\theta}$$

D'après ce qui précède :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta\dot{\theta}$$

6. En suivant la même démarche, on montre que :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \quad \vec{u}_r\dot{\theta}$$

14 Détection d'exoplanète

1. La vitesse relative de E par rapport à O est donc :

$$\vec{v}_r = \vec{v} + \vec{v}_G$$

Dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ cela donne :

$\vec{v}_r.\vec{u}_x = \quad v\sin\theta + v_G$

$\vec{v}_r.\vec{u}_y = v\cos\theta$ donc :

$$\vec{v}_r = (\ v\sin\theta + v_G)\vec{u}_x + v\cos\theta\vec{u}_x$$

2. La vitesse radiale relative v_r est donc :

$$v_{rr} = \quad v\sin\theta + v_G$$

L'intervalle de variation de cette fonction est :

$$[v_G \quad v; v_G + v]$$

3. La distance OE en fonction est : p

$$OE = \sqrt{D^2 + R^2 + 2DR\cos\theta}$$

d'après Al-Kashi.

L'intervalle de variation de cette fonction est :

$$[D \quad R; D + R]$$

15 Positionnement dans la Voie Lactée

TD : Equations différentielles du deuxième ordre

Corrigé

1 Pratique de la résolution

Equation 1 : $y'' + 9y = 0$ a pour solution $y = cos3t + \mu sin3t$ avec $y(t=0) = 0$, on a : $y(t=0) = 0 =$ et $y'(t=0) = 1 = 3\mu$, ce qui donne $\mu = 1/3$ et donc finalement :

$\boxed{y = \frac{1}{3} sin\ 3t}$

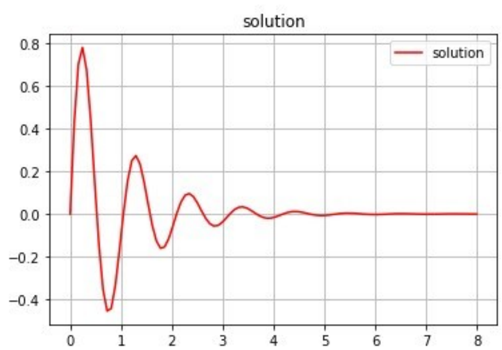
Qui correspond à une fonction sinusoïdale de pulsation 3 et donc de période $T = \frac{2\pi}{3} s$ et d'amplitude 1/3 Equation 2 : y'' $9y = 0$ a pour solution $y = e^{3t} + \mu e^{3t}$ avec $y(t=0) = 0$, on a : $y(t = 0) = 0 = y = + \mu$ et $y'(t=0) = 1 = 3\ 3\mu$, ce qui donne $= \mu$ et $1 = 3 + 3 = 6$ et donc finalement

$\boxed{y = \frac{1}{6} e^{3t} \quad \frac{1}{6} e^{\ \ 3t}}$

Qui correspond à une fonction qui débute en 0 avec une pente de 1 et qui diverge en l'infini. Equation 3 : $y'' + y' + 9y = 0$ et donc une pulsation propre $\omega_0 = 3$ et un facteur de qualité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = 1$ donc $Q = 3$ Donc $Q > 1/2$ donc on est en régime pseudopériodique et on a donc une solution de la forme : $y = e^{\frac{\omega_0}{2Q} t} (\lambda cos\Omega t + \mu sin\Omega t)$ avec $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 \quad \frac{1}{4Q^2}}$

Avec $y(t=0) = 0$, on a : $0 =$ et $y'(t=0) = \mu\Omega = 1$ et donc $\mu = 1/\Omega$ ce qui donne finalement :

$\boxed{y = \frac{1}{\Omega} e^{\frac{\omega_0}{2Q} t} sin\ \Omega t}$



Equation 4 :

On cherche d'abord l'équation homogène associée à $y'' + y' + 9y = 1$, qui est $y'' + y' + 9y = 0$ dont la solution est, comme on l'a vu précédemment : $y_H = e^{\frac{\omega_0}{2Q} t} (\lambda cos\Omega t + \mu sin\Omega t)$

avec $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 \quad \frac{1}{4Q^2}}$

La solution particulière de l'équation est une constante puisque le second membre est une constante et on obtient simplement $y_P = 1/9$

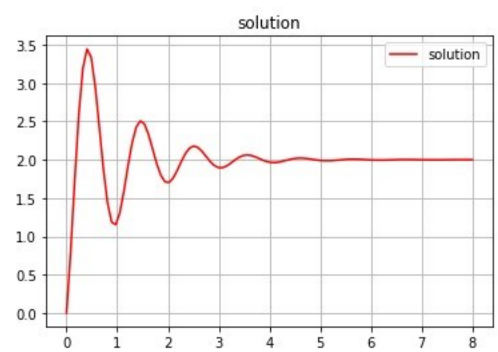
la solution générale est donc : $y = e^{\frac{\omega_0}{2Q} t} (\lambda cos\Omega t + \mu sin\Omega t) + 1/9$

Avec $y(t=0) = 0$, on a : $0 = y(0) = \quad + 1/9$ et donc $= 1/9$

$y'(t=0) = 1 = \frac{\omega_0}{2Q}\lambda + \mu\Omega$ ce qui permet de déterminer $\mu = \frac{1 \quad \frac{\omega_0}{2Q} 1/9}{\Omega}$

Donc finalement :

$\boxed{y = e^{\frac{\omega_0}{2Q} t} \left(\frac{1}{9} cos\ \Omega t + \frac{1 \quad \frac{\omega_0}{2Q} 1/9}{\Omega} sin\ \Omega t \right) + 1/9}$



Equation 5 :

Pour l'équation $y'' + 6y' + 9y = 0$ on a une pulsation propre $\omega_0 = 3$ et un facteur de qualité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = 6$ donc $Q = 1/2$ Donc $Q = 1/2$ donc on est en régime critique et on a donc une solution de la forme :

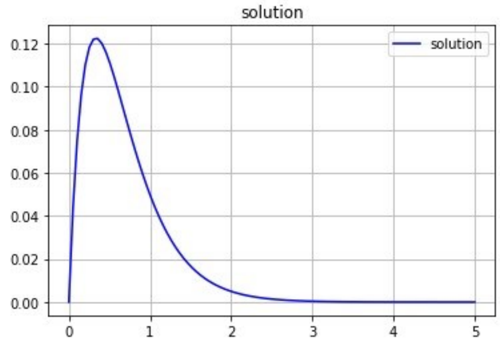
$y = (+ \mu t)e^{\ \omega_0 t} = (+ \mu t)e^{\ 3t}$

la solution générale est donc : $y = (+ \mu t)e^{\ 3t}$

Avec $y(t=0) = 0$, on a : $0 = y(0) =$ et donc $= 0$ $y'(t=0) = 1 = \mu$ ce qui permet de déterminer $\mu = 1$

Donc finalement :

$\boxed{y = te^{\ 3t}}$



Equation 6 :

Pour l'équation $y'' + 7y' + 9y = 0$ on a une pulsation propre $\omega_0 = 3$ et un facteur de qualité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = 7$ donc $Q = 3/7$

Donc $Q < 1/2$ donc on est en régime apériodique et on a donc une solution de la forme : $y = e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$

Avec $y(t = 0) = 0$, on a : $0 = y(0) = y = \quad + \mu$ et donc $= \quad \mu$

$y'(t = 0) = 1 = r_1 + r_2\mu$ ce qui permet de déterminer $1 = \quad (r_1 \quad r_2)$ donc $= \frac{1}{(r_1 \quad r_2)}$

Donc finalement :

$$y = \frac{1}{(r_1 \quad r_2)} e^{r_1 t} \quad \frac{1}{(r_1 \quad r_2)} e^{r_2 t}$$

2 Liens quantitatif-qualitatif

1. La condition sur ⌧ pour que le mouvement soit stable est ⌧ > 0, comme cela, tous les termes sont du même signe et la solution correspond forcément à une relaxation.

La condition sur ⌧ et pour que mouvement soit pseudo-périodique correspond à avoir un discriminant négatif :

$$= ⌧^2 \quad 4 \quad < 0$$

2. Cette équation sous forme canonique est

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

3. Pour prévoir qualitativement l'allure de $x(t)$, on utilise le fait que : le facteur de qualité de l'équation est de l'ordre de 5 : il y aura environ 5 oscillations visibles.

la pulsation propre est de l'ordre de 1 : la période sera de l'ordre de $\frac{2\pi}{1}s$

Les conditions initiales sont $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0 = 2$: on part de 0 avec une pente initiale de 2.

Ces différentes informations permettent de tracer l'allure de $x(t)$.

4. Pour déterminer analytiquement $x(t)$, on a : $x = e^{-t/⌧}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$ où $⌧ = \frac{2Q}{\omega_0} = 10s$

Avec les conditions initiales, on a $x(t = 0) = 0 = A$ Et $\dot{x}(t = 0) = B\Omega = 2$

or $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \longleftarrow \omega_0$ ce qui donne $B \sim \frac{2}{\omega_0}$

donc

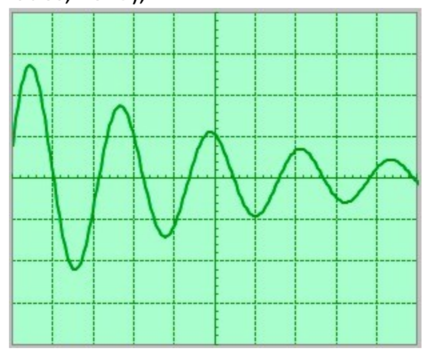
$$x(t) = \frac{2}{\omega_0} \sin \Omega t e^{-t/⌧}$$

3 Extraction de données

1. Pour déterminer les conditions initiales, on mesure la valeur du signal et de sa pente à l'état initial

$$u(0) = 4 \quad V \text{ et } \dot{u}(0) = \frac{9 \quad 4}{1/5} = 25 \quad V.(10ms)^{-1} = 2,5.10^3 V.s^{-1}$$

2. Pour la pseudo-période, on mesure la distance entre deux maxima successifs i.e. entre 1 et 2 (idéalement, il faudrait prendre la distance entre des maxima les plus éloignés possibles, i.e. entre 1 et 3 et diviser par le nombre de pseudo-périodes, i.e. 3),



ce qui donne 2 carreaux, i.e. $T = 20ms$ Pour la pseudo-pulsation, on utilise :

$$\Omega = \frac{2⌧}{T} ' \frac{6}{0,02} ' \quad 3.10^2 rad.s^{-1}$$

3. Pour le décrément, il suffit de déterminer le rapport entre les valeurs en 1 et en 2, i.e. $\frac{u_1}{u_2} = \frac{13}{7} = 2$ donc

$$= ln2$$

Or, le décrément est lié au temps de décroissance : $= \frac{T}{\tau}$ ce qui donne

$$\tau = \frac{T}{\delta} = \frac{2.10^{-2}}{ln2}$$

4. On a donc $u(t) = e^{-t/⌧}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$. On utilise les conditions initiales pour déterminer A et B : $u(0) = A$ qui donne A et $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = -\frac{A}{\tau} + B\Omega$ qui donne B.

4 Levitron

4.1 Lévitron en rotation

1. La solution particulière est une constante, car le second membre est une constante quand on réécrit l'équation sous la forme : $\ddot{z} + ⌧^2 z = \ $. On cherche une constante, donc $\ddot{z}_P = 0$, ce qui donne : $z_P = \frac{⌧}{⌧^2}$

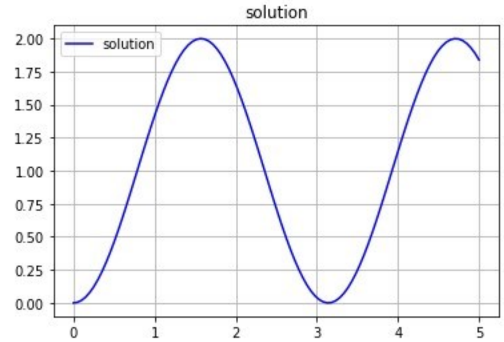
La solution de l'équation homogène associée vérifie : $\ddot{z}_H + ⌧^2 z_H = 0$ et est donc de la forme : $z_H = \cos⌧t + \mu\sin⌧t$

On a donc : $z(t) = \quad \cos⌧t + \mu\sin⌧t + \frac{⌧}{⌧^2}$

Or, on sait que : $z(t = 0) = 0$ donc $z(t = 0) = 0 = +\frac{⌧}{⌧^2}$ de plus $\dot{z}(t = 0) = 0 = \mu⌧$ Donc finalement :

$$z(t) = \frac{⌧}{⌧^2}(1 \quad \cos⌧t)$$

2. L'allure de $z(t)$ est donc :



Où l'on vérifie la continuité de $z(t)$ et la nullité de la pente initiale.

La période du mouvement est : $T = \frac{2\pi}{\alpha}$

3.

Avec les conditions initiales : $z(t = 0) = /⍰^2$ et $\dot{z}(t = 0) = v_0$, on a toujours la même forme de solution générale : $z(t) = cos⍰t + \mu sin⍰t + ⍰\_\_2$

Mais les conditions imposent à présent :

$z(t=0) = \beta/\alpha^2 = \lambda + \frac{\beta}{\alpha^2}$

et $\dot{z}(t=0) = v_0 = \mu\alpha$ donc = 0

Donc :

$$z(t) = \frac{v_0}{\alpha} sin\alpha t + \frac{\beta}{\alpha^2}$$

Ces nouvelles conditions ne modifient pas la période des oscillations.

4.2 Lévitron en l'absence de rotation

4. On a une équation $\ddot{z} = ⍰^2 z$, donc avec une solution en exponentielle réelle : le comportement du système est instable.

5. On a : $z(t) = z_P + z_H = /⍰^2 + e^{⍰t} + \mu e^{⍰t}$

où, puisque l'on donne des conditions initiales séparées, sur la position et la vitesse, il vaut mieux utiliser : $z(t) = z_P + z_H = /⍰^2 + {}^0 cosh⍰t + \mu^0 sinh⍰t$

Avec les conditions initiales, cela donne : $z(t = 0) = /⍰^2 = /⍰^2 + {}^0$ donc $^0 = 0$ Et $\dot{z}(t = 0) = v_0 = ⍰\mu^0$ donc : $\frac{v_0}{\alpha} = \mu'$ et finalement :

$$z(t) = \beta/\alpha^2 \quad \frac{v_0}{\alpha} sinh\alpha t$$

Le temps typique d'évolution est celui qui intervient pour adimensionner le $sinh$, donc :

$$⍰ = 1/⍰$$

5 Vibrations dans un module d'Ariane

1.

Si on écrit que la courbe de déplacement $x(t)$ du capteur en fonction du temps figurée à droite est de la forme : $x(t) = x_0 cos(!_1 t + ')$, sa période est donnée $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{57} \sim 0,1s$ par.

Sur le graphe de droite, on mesure qu'une période de la courbe bleu correspond environ à 3,5 carreaux. Donc l'échelle temporelle de ce graphe est 0,1 \$ 3,5*carreaux*

Le déplacement s'écrit sous la forme : $x(t) = x\, sin(!\, t + ')$ avec $x_1 = 1,8mm$, $\omega_1 = 57rad.s^{1}$ et φ telle que l'annulation de l'argument du sinus atteint après 0,3 carreaux soit en $t = t_{annulation} = \frac{0,3.0,1}{3,5} = 10^{2}s$.

Or l'annulation de l'argument est atteinte en $!_1 t_{annulation} + ' = 0$ i.e. ence qui $t_{annulation} = \frac{\varphi}{\omega_1}$ donne $' = !_1 t_{annulation} = 57.10^{2}$ ← 0,6 rad

On a ainsi déterminé les trois grandeurs qui caractérisent entièrement $x(t)$.

2.

$x(t)$ est une fonction sinusoïdale, donc la forme générale de l'équation différentielle qui a pour solution $x(t)$ est une équation du second ordre sans terme d'amortissement, donc de la forme :

$$\ddot{x} + !_0^2 x = a$$

Or l'oscillation se fait autour de 0, donc la solution particulière est nulle et donc $a = 0$.

D'autre part, l'oscillation se fait à la pulsation $!_1$, donc on doit avoir $!_0 = !_1$.

Les conditions initiales $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ sur cette grandeur, au vu de la courbe réponse sont : $x(t = 0) = x_0 = x_1 sin' = 1mm = 10^{3}m$

Et $\dot{x}(t=0) = \dot{x_0} = x_1\omega_1 cos\varphi = \frac{10^{3}}{\frac{0,3.0,1}{3,5}}$. en effet, la courbe croît d'un carreau vertical ($10^{3}m$) en environ 1/3 de carreau horizontal.

3. Pour qu'il y ait amortissement, l'équation doit avoir les trois termes du même signe, i.e.

$$\ddot{x} + ⍰\dot{x} + !_1^2 x = 0$$

L'homogénéité de ⍰ est telle que $⍰\dot{x}$ soit homogène à une accélération, donc ⍰ est homogène à l'inverse d'un temps.

4. Une condition pour que l'amortissement soit apériodique correspond à un facteur de qualité inférieur à 1/2 ou un discriminant négatif, ce qui se traduit par :

$$= ⍰^2 \quad 4!_1^2 < 0 \text{ donc } ⍰^2 < 4!_1^2 \text{ donc } ⍰ < 2!_1$$

5. Pour déterminer $x(t)$, on écrit la forme générale d'une solution apériodique :

$x(t) = e^{\,t/⍰_1} + {}^0 e^{\,t/⍰_2}$ avec $1/⍰_1 = r_1$ et $1/⍰_2 = r_2$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique : $r + ⍰r + !_1 = 0$

D'autre part, les deux constantes d'intégration et $_0$ sont déterminées à l'aide des conditions initiales : $x(t = 0) = x_0 = + {}_0$

et$\dot{x}(t=0) = \dot{x_0} = \frac{\lambda}{\tau_1} + \frac{\lambda'}{\tau_2}$

ce qui constitue un système de deux équations à deux inconnues dont la résolution permet d'obtenir et $_0$.

D'autre part, on a forcément un des deux termes ⍰1 ou ⍰2 qui est petit devant l'autre. Mettons que ce soit ⍰1.
Dans ce cas, après quelques ⍰1, le terme en $e^{\ t/⍰_1}$ est négligeable, alors que $_0e^{\ t/⍰_2}$ ne l'est pas encore. Ce qui implique que :

$$x(t) = \ e^{\ t/⍰_1} + \ _0e^{\ t/⍰_2} \qquad _0e^{\ t/⍰_2}$$

⟵

6. Le temps mis pour atteindre $x_0/10$ peut donc être approché par :

$$x(t_0) = x_0/10 = \qquad {}^0e^{\ t_0/⍰_2}$$

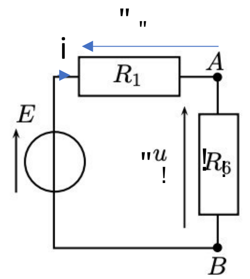
ce qui permet déterminer t_0.

TD : Rappels d'électrocinétique : loi des noeuds et loi des mailles

Corrigé

1 Manipulation classiques

1 - O n a :



La loi des mailles dans le premier montage s'écrit : E U_1 U_2 $=0$ donc :

$$E = U_1 + U_2$$

La loi d'Ohm pour les deux résistances R_1 et R_2 s'écrit : $U_1 = R_1 i$ et $U_2 = R_2 i$. On notera que c'est bien le même courant qui traverse les deux résistances parce qu'elles sont en série (il n'y a pas de dérivation entre les deux résistances).

On réinjecte donc dans la loi des mailles, et on a :
$E = (R_1 + R_2) i$

Ce qui donne :

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

2 - Donc :

$$u = U_2 = R_2 i = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

3 - La loi des mailles dans le deuxième montage s'écrit :

$E_0 = U_{R_1} + u$ (il faut noter que la tension u est la tension aux bornes de R_2 ou la tension aux bornes de R_3 : ces deux résistances étant en parallèle, la tension à leurs bornes est la même)

La loi des noeuds s'écrit : $i = i_2 + i_3$ Or la tension u s'écrit : $u = R_2 i_2 = R_3 i_3$ Donc l'expression précédente devient :
$i = \frac{u}{R_2} + \frac{u}{R_3}$

La loi d'Ohm pour R_1 donne : $U_{R_1} = R_1 i$ La loi des mailles devient ainsi : $E_0 = R_1 i + u$ donc $E_0 = R_1(\frac{u}{R_2} + \frac{u}{R_3}) + u$

: Donc :

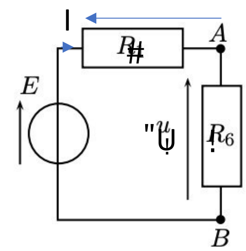
$$u = \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

4 - On peut vérifier que l'on retrouve dans cette formule la loi d'association des résistances en parallèle :
$u = \frac{R_2//R_3 E}{R_1 + R_2//R_3}$
ce qui est cohérent avec le fait que u est ici la tension aux bornes de $R_2//R_3$. L'idée est donc que l'on peut remplacer R_2 dans le premier montage par $R_2//R_3$ pour obtenir la nouvelle expression de u dans le deuxième montage.

1

2 Adaptation d'une charge

1 - Schéma :



2 - On a

$$U = \frac{ER}{R + r} \text{ et } I = \frac{E}{R + r}$$

3 - Donc : $\boxed{P = UI = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}}$

Donc le maximum est atteint quand $\frac{dP}{dR} = 0$, i.e. quand :

$$R = R_0 = r$$

4 - L'allure de $P(R)$ peut être vérifiée sur calculatrice.

3 Régime permanent

1 - Le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $i = 0$. Or $i_2 = 0$.

D'après la loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$

Donc : $i_1 = i$ $i_2 = 0$ $0 = 0$

2 - Si l'on ferme l'interrupteur K, en régime permanent, on a toujours $i = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

On a donc $i_1 = i$ $i_2 = i_2$

Si l'on écrit la loi des mailles, on a : $E_1 = R_1 i_1 + R_2 i_1 + E_2$. Donc :

$$i_1 = \frac{E_1 \quad E_2}{R_1 + R_2}$$

4 Exercices techniques

1 - La loi des noeuds en N s'écrit :

$$i = i_1 + i_2$$

2 - La loi des mailles dans la maille de gauche :

$$u_1 = R_1 i_1 + u = R_1 i_1 + ri$$

La loi des mailles dans la maille de droite :

$$u_2 = R_2 i_2 + u = R_2 i_2 + ri$$

3 -

On en déduit : $i_1 = \frac{u_1 - ri}{R_1}$ et $i_2 = \frac{u_2 - ri}{R_2}$

$i_1 + i_2 = i = \frac{u_1 - ri}{R_1} + \frac{u_2 - ri}{R_2}$

Donc : $i(1 + \frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2}) = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}$ Or

Donc :

$$i = \frac{\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}}{1 + \frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2}}$$

4 - La puissance reçue par la résistance est :

$$P = ri^2 = r\left(\frac{\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}}{1 + \frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2}}\right)^2$$

5 Associations de résistances et conséquences

Associations

1 - La tension aux bornes de l'ensemble est la somme de la tension aux bornes de chaque résistance :

$U = U_1 + U_2 = R_1 i + R_2 i$

Ce que l'on peut mettre sous la forme : $U = R_S i$ si $R_S = R_1 + R_2$. L'association série de deux résistances est une résistance de valeur :

$$R_S = R_1 + R_2$$

2 - La tension aux bornes des deux résistances est la même et on la note U. Le courant i qu traverse l'ensemble se scinde en $i = i_1 + i_2$ où $i_1 = \frac{U}{R_1}$ est le courant qui traverse R_1 et $i_2 = \frac{U}{R_2}$ est le courant qui traverse R_2.

Ainsi, $i = i_1 + i_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$

Que l'on peut mettre sous la forme $i = \frac{U}{R_{//}}$ si l'on a : $\frac{U}{R_{//}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$ donc :

$$\frac{1}{R_{//}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Donc l'association en parallèle de deux résistances R_1 et R_2 est équivalente à une résistance :

$$R_{//} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Applications

3 - L'association parallèle de $2R$ et de $3R$ est équivalente à une résistance $R_{//} = \frac{2R.3R}{2R+3R} = \frac{6R}{5}$. Soumise à une tension E, cet ensemble équivalent est donc traversé par un courant :

$$I = \frac{E}{R_{//}} = \frac{5E}{6R}$$

4 - C'est la même chose que le premier exercice, avec $R_1 = R$ et $R_2 = 2R$. Donc :

$$U = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = \frac{2RE}{R + 2R} = \frac{2E}{3}$$

5 - C'est le même courant ￿ qui traverse tout le circuit (une seule maille, un seul courant). La tension U aux bornes d'une résistance $2R$ traversée par un courant ￿ est d'après la loi d'Ohm :

$$U = 2R￿$$

6 - En généralisant le résultat obtenu précédemment à deux résistances dans le cas de trois résistances, on peut montrer que l'association en parallèle de trois résistances R_1, R_2 et R_3 est une résistance $R_{//}$ telle que $\frac{1}{R_{//}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Ici, on a l'association parallèle de R, $2R$ et $3R$, ce qui donne :

$\frac{1}{R_{//}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}$ Donc $R_{//} = \frac{6R}{11}$. Cet ensemble soumis à une tension E est traversé par un courant :

$$I = \frac{E}{R_{//}} = \frac{11E}{6R}$$

7 - L'association parallèle de $2R$ et de $3R$ est équivalente à une résistance $R_{//} = \frac{6R}{5}$. Le circuit est donc une résistance qui est l'association en série de R et de $6R/5$ donc une résistance équivalente de $11R/5$. Alimenté par une tension de E, il sera traversé par un courant de :

$$I = 5E/11R$$

DM 1.0

Tous les résultats doivent être encadrés ou soulignés - l'utilisation du surligneur est proscrite. Encadrer signifie “entourer d'un cadre”, et non esquisser à la va-vite un vague encadrement. Souligner signifie “tracer une ligne sous un texte” et non tracer une courbe sous un texte. En conséquence, ces deux actions nécessitent une règle.

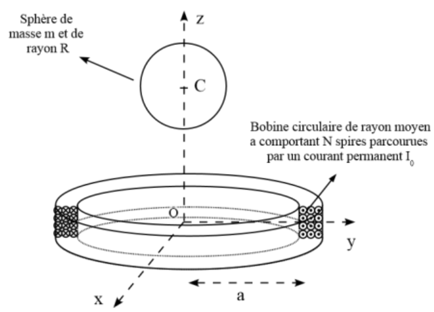
Aux concours, les copies mal présentées reçoivent une pénalité de 10% en plus des questions que le correcteur ne corrige pas parce qu'il les considère comme illisibles.

Les DS et les DM de CPGE sont tous corrigés dans cette logique.

Autant commencer à préparer l'aspect “présentation de copie” dès ce DM.

1 Gravimètre à lévitation

On se propose d'étudier un gravimètre (appareil destiné à la mesure de l'intensité g du champ de pesanteur terrestre. Un gravimétre est qualifié d'absolu s'il permet de mesurer g , il est qualifié de "relatif" s'il est destiné à la mesure de la variation de g. Au début des années 1970 une nouvelle famille de gravimètres relatifs a été développée : les gravimétres supraconducteurs. Le principe est de réaliser l'équilibre d'une sphère en niobium soumise d'une part à l'action de son poids et d'autre part à l'action d'une force de "lévitation magnétique". La force de "lévitation magnétique" résulte de l'action du champ magnétique, créé par deux bobines parcourues par un courant permanent sur les courants qui parcourent la sphère. La mesure de cette force donne accès à la mesure du poids de la sphère et partant, à g.



A gauche : Gravimètre supraconducteur de l'observatoire gravimétrique de Starsbourg. A droite : schéma de principe, lévitation de la sphère

Le but de ce problème est d'illustrer de manière simple le principe de la mesure de la variation de g. On s'appuie sur la figure de droite qui représente la sphère supraconductrice de masse m, de rayon R et de centre C qui se déplace le long de l'axe vertical O_z et l'une des bobines qui crée le champ magnétique responsable de la lévitation de la sphère.

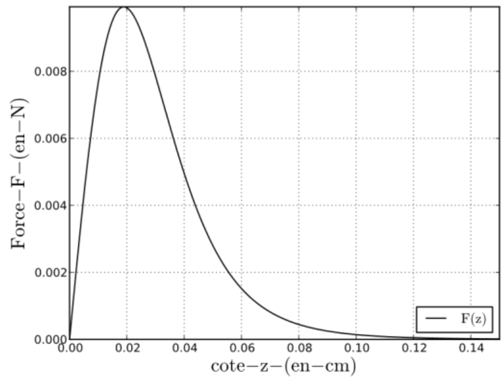
Le référentiel d'étude (O,x,y,z) situé à la surface de la Terre sera considéré comme galiléen. On suppose que la force de lévitation d'origine magnétique subie par la sphère dans le système considéré s'écrit : $\vec{F} = F(z)\vec{u}_z$ où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire de l'axe O_z orienté vers le haut et $F(z) = \alpha I_0^2 \frac{z}{(z^2+a^2)^4}$ avec $\alpha = 1{,}25 \times 10^{-12} u_{SI}$; le paramètre a désigne le rayon moyen de la bobine circulaire et I_0 l'intensité du courant qui circule dans les spires est exprimée en $[I_0] = C.s^{-1} = A$. On note g l'intensité du champ de pesanteur. On limite l'étude à la demi-droite $z \geq 0$.

Existence d'une ou de plusieurs positions d'équilibre 1 - Déterminer la dimension de la constante α à l'aide des dimensions kg, m, s et C. Quelle est forcément la dimension de a? Tracer l'allure la fonction $F(z)$. Déterminer la position (abscisse notée z_{max} et ordonnée notée F_{max}) de son maximum local en fonction de I_0, α et a.

2 - Représenter sur un schéma les deux forces qui s'exercent sur la sphère. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la sphère de masse m et de position z et en déduire la condition de l'équilibre de celle-ci.

3 - Expliquer qu'il existe une valeur minimale I_{min} du courant I_0 pour que la lévitation magnétique soit possible. Exprimer I_{min} en fonction de m, g, a et □, puis l'évaluer numériquement pour a = 5,0cm, m = 5,0.10 ^{4}kg et g = 9,8$m.s$ ^{2}.

Stabilité des positions d'équilibre On choisit un courant I_0 = 14A. La figure suivante représente *dans ce cas* la fonction $F(z)$ en fonction de z variant de 0 à 10cm.



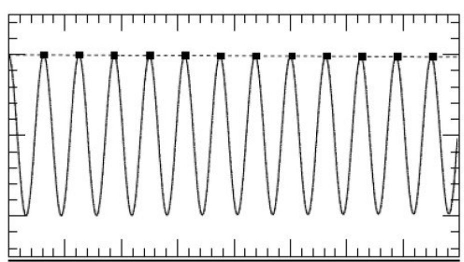
4 - En s'appuyant sur la figure que l'on pourra reproduire sommairement sur la copie, montrer graphiquement qu'il existe alors deux positions d'équilibre. On notera z_1 et z_2 avec $z_1 < z_2$ les deux valeurs de z associées. Donner un ordre de grandeur de z_1 et z_2 à l'aide du graphe précédent.

5 - Analyser qualitativement l'effet sur $F(z)$ d'une petite variation de position z autour de z_1 (dans les deux sens possibles) et, en conduisant un raisonnement qualitatif précis, étudier la stabilité de cette position d'équilibre. Etudier de même la statibilité de la position d'équilibre z_2. En déduire qu'une seule des deux positions d'équilibre est stable. Comportement au voisinage de la position stable A l'aide d'une modélisation graphique, on cherche à modéliser le mouvement de la sphère au voisinage de la position d'équilibre stable exhibée précédemment, notée z_S = 0,04m et supposée connue dans ce qui suit.

6 - A l'aide du graphe précédent, en lisant les valeurs de la fonction et de sa pente en z_S, proposer une approximation linéaire de $F(z)$ au voisinage de cette position d'équilibre stable. On admet notamment que la somme $F(z)$ mg peut se mettre sous la forme approchée kz + □ : donner la valeur de k et de □.

7 - En déduire qu'avec cette approximation linéaire, le principe fondamental de la dynamique se simplifie en une équation linéaire du second ordre. Vérifier qualitativement que cette équation correspond bien à une position d'équilibre stable.

8 - Mettre en forme cette équation et faire apparaître une pulsation caractéristique $!_0$ en fonction de k et m. Vérifier que l'équation peut se réécrire en faisant intervenir uniquement $\ddot{z}$, z, z_S et $!_0$. Calculer numériquement la valeur de la période de ces oscillations à l'aide de cette approximation linéaire. Expérimentalement, on obtient une courbe d'oscillations figurée ci-après. En supposant que la période expérimentale est cohérente avec la période théorique déterminée à la question précédente, en déduire l'échelle temporelle du graphe expérimental.



Comportement au voisinage de la position instable Dans la partie précédente, on a fait une approximation linéaire à partir de lectures de graphe. Ici, on fait une approximation linéaire à partir de l'expression exacte de $F(z)$: il s'agit de faire un développement limité de la fonction $F(z)$ à l'ordre 1 au voisinage de z_A.

9 - A l'aide de l'expression de $F(z)$, déterminer une approximation linéaire de $F(z)$ au voisinage de la position d'équilibre instable, notée z_A.

10 - En utilisant le fait que $F(z_A)$ = mg, en déduire que la somme $F(z)$ mg peut se mettre sous la forme approchée : $+k_0(z\ z_A)$ où l'on exprimera k_0 en fonction des constantes du problème.

11 - En déduire l'équation différentielle approchée vérifiée par $z(t)$ au voisinage de z_A. Analyser le fonctionnement de cette équation différentielle : la position d'équilibre est-elle bien instable? Construire un temps typique d'évolution. Ce temps typique a-t-il un sens physique?

12 - On considère la sphère placée en la position d'équilibre instable avec une vitesse initiale $z^{\cdot}(t = 0) = v_0$. Déterminer $z(t)$ dans ce cas et valider les approches précédentes.

Comportement au voisinage d'un point critiqueconvergent l'un vers l'autre et tendent vers z_{max}. On admet que si l'on prend en compte d'autres eDans le cas où $I_0 \leftarrow I_{min}$ les points d'équilibre stable et instableffets (frottements,...), dans certaines conditions, l'équation différentielle qui régit la position est alors de la forme : $mz^{\cdot} = \quad (z \quad z_{max})^{3/2}$. On préfère à la forme précédente l'écriture $mZ^{\cdot} = \quad Z^{3/2}$ avec $Z = z \quad z_{max}$.

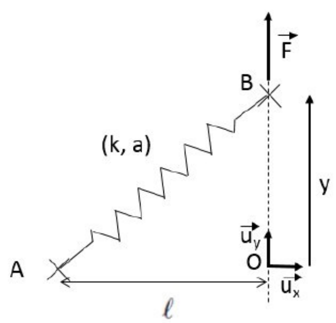
13 - On se place dans la situation où $Z(t = 0) = Z_0 > 0$. Prévoir qualitativement l'évolution de $Z(t)$: l'équation est-elle stable ou instable? Construire le temps typique d'évolution ⍰.

14 - Mettre l'équation précédente sous la forme : $\frac{dZ}{Z^{3/2}} = \quad \gamma dt$. Trouver la primitive de $\frac{1}{Z^{3/2}}$. Vérifier en dérivant cette primitive que l'on retombe bien sur $\frac{1}{Z^{3/2}}$. Expliquer pourquoi cette primitive est égale à $t+cste$. Déterminer la constante en utilisant la condition initiale sur Z. En déduire $Z(t)$.

15 - Déterminer le temps typique de convergence ⍰$_T$ tel que $Z($⍰$_T) = Z_0/2$. Comparer ⍰$_T$ et ⍰. Commenter.

2 Mécanique

Etude d'un système bistable Nous nous proposons d'étudier une instabilité pouvant apparaître sur les structures en coque mince. Ces structures, de faible épaisseur par rapport à leurs autres dimensions, sont très utilisées pour leur intérêt architectural.

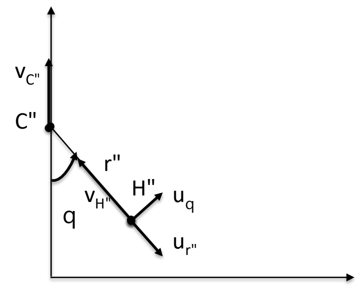


Sur la figure précédente, la structure est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide a et est soumise à une charge verticale $!F = F\,!u_y$. Ce ressort est fixé à une extrémité par une rotule, au point A. Son autre extrémité, le point B, peut glisser sans frottement exclusivement suivant l'axe $(O,!u_y)$ de la glissière, et possède une masse m. La projection orthogonale du point A sur cet axe définit le point O. Nous notons $\overrightarrow{AO} = l\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{OB} = yu_y$!. La masse m du point B étant très faible, on négligera la force de pesanteur. On admet que la force exercée par le ressort sur le point B est de la forme : $!F = k(AB \quad a)!u_l$ où $!u_l$ est le vecteur unitaire : $u_l = \frac{AB}{AB}$! !

16 - Exprimer le vecteur $!AB$ dans la base cartésienne. En déduire sa norme AB, puis le vecteur unitaire $!u_l$.

17 - Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à B selon la direction $!u_y$. En déduire l'équation qui définit la position d'équible de B. Cette équation possède deux solutions, ce qui fait du système considéré un système bistable.

Calvin vs Hobbes Calvin - noté C - se meut à vitesse constante v_C sur une droite confondue avec l'axe $!u_y$. Son tigre Hobbes, H, qui lui est initialement distant de r_0 dans la direction perpendiculaire à cette droite, court vers lui à la vitesse de norme v_H constante.



18 - Exprimer !v_C dans la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ en fonction de v_C et ✓. Exprimer de même la vitesse de Hobbes !v_H dans la base polaire.

On admet que dans le référentiel R' lié à Calvin, la vitesse !v_{H0} du tigre est donnée par $\overrightarrow{v'_H} = \overrightarrow{v_H} \quad v_C$!. On écrit cette vitesse en coordonnées polaires.

19 - Exprimer v'_H! dans la base polaire en fonction de v_C, v_H et ✓.

Collapse d'un système de masses Soient trois masses m initialement immobiles, réparties sur un cercle de rayon r_0, au sommet d'un triangle équilatéral. Les trois masses sont en interaction gravitationnelle, de sorte que l'ensemble se contracte et que le cercle sur lequel est inscrit le triangle équilatéral formé par les trois masses à un instant t est noté $r(t)$. On s'intéresse au mouvement de l'une des masses, repérée par rapport au centre O de l'ensemble, par la distance $r(t)$. Il n'y a pas de mouvement de rotation propre.

20 - Construire par analyse dimensionnelle un temps typique de collapse du système (temps typique mis par les masses pour se rejoindre au centre du cercle qu'elles forment), ⍰$_0$, uniquement en fonction des variables G, m et r_0.

21 - Exprimer la distance entre les masses, $D(t)$ en fonction de $r(t)$. Exprimer la force gravitationnelle subie par une masse selon le vecteur !u_r. En déduire l'équation [⇤] du mouvement radial de la masse, reliant $\ddot{r}$, r, G et m.

22 - On cherche à montrer que cette équation est équivalente à l'équation suivante $[**] : \frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{Gm}{\sqrt{3}}(\frac{1}{r} \quad \frac{1}{r_0})$. Dériver [⇤⇤] par rapport au temps et vérifier que l'on retrouver bien [⇤]. En déduire $\dot{r}(r)$ en prenant bien garde au signe.